Instituto de Química
IQ - UFG

ENGENHARIA QUÍMICA
Universidade Federal de Goiás

Introdução

Álgebra Tensorial

Professor Dyrney Araújo dos Santos
Universidade Federal de Goiás
Curso: Pós Graduação em Engenharia Química
Disciplina: Fenômenos de Transporte
site: www.dyrney.com

Professor Dyrney Araújo dos Santos
Universidade Federal de Goiás
Pós-Graduação em Engenharia Química
site: www.dyrney.com

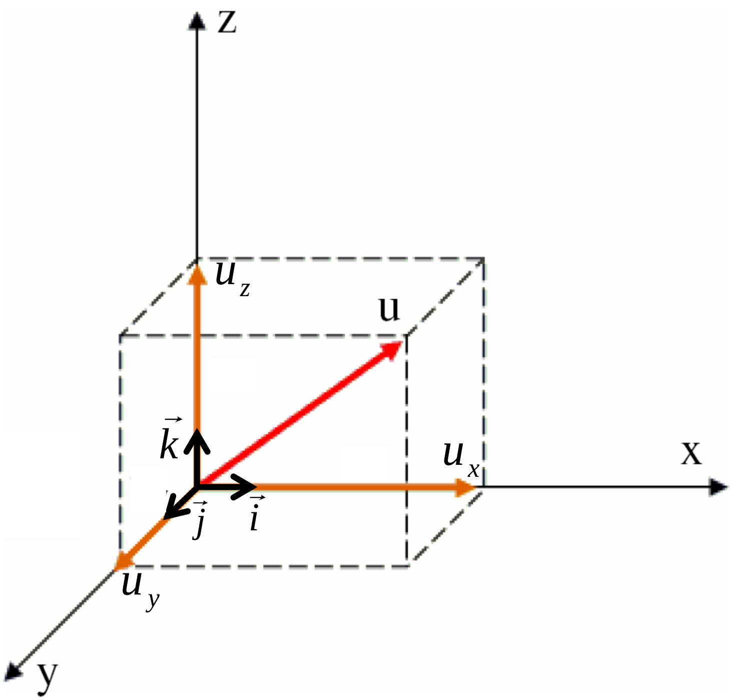
1. Introdução

1.2 Álgebra Tensorial

a) Grandeza Escalar: requer apenas um valor numérico para ser totalmente caracterizada.

Ex: massa, comprimento, área, volume, densidade, viscosidade, condutividade térmica, calor específico, temperatura, etc.

b) Grandeza Vetorial: requer, além do valor numérico (módulo), uma direção e um sentido. Ex: velocidade, aceleração, força, etc.



representação de um vetor "$\vec{u}$" qualquer em coordenadas retangulares ou cartesianas

$$\boxed{\vec{u} = u_x\vec{i} + u_y\vec{j} + u_z\vec{k}}$$

OBS.: u_x, u_y e u_z são escalares (fornece o módulo em cada direção). Logo, suas somas necessitam da multiplicação por vetores unitários i, j e k (fornece a direção e o sentido sem modificar o módulo ou valor numérico).

René Descartes
(1596 – 1650)
(Filósofo, físico e matemático francês)

1. Introdução

1.2 Álgebra Tensorial

Principais Operações Envolvendo Vetores

i) Adição de Vetores: o resultado da soma ou subtração entre vetores é um vetor.

Ex: sejam dois vetores quaisquer, $\vec{u}$ e $\vec{v}$, logo,

$$\vec{u}+\vec{v} = \left(u_x\vec{i}+u_y\vec{j}+u_z\vec{k}\right)+\left(v_x\vec{i}+v_y\vec{j}+v_z\vec{k}\right)$$

$$\boxed{=\left(u_x+v_x\right)\vec{i}+\left(u_y+v_y\right)\vec{j}+\left(u_z+v_z\right)\vec{k}} \longrightarrow \boxed{\text{Vetor}}$$

ii) Multiplicação de um Vetor por um Escalar: o resultado da multiplicação de um vetor ($\vec{u}$) por um escalar (α) é um vetor.

$$\alpha\vec{u} = \alpha\left(u_x\vec{i}+u_y\vec{j}+u_z\vec{k}\right)$$

$$\boxed{=\alpha u_x\vec{i}+\alpha u_y\vec{j}+\alpha u_z\vec{k}} \longrightarrow \boxed{\text{Vetor}}$$

Professor Dyrney Araújo dos Santos
Universidade Federal de Goiás
Pós-Graduação em Engenharia Química
site: www.dyrney.com

1. Introdução

1.2 Álgebra Tensorial

iii) Produto Escalar entre Vetores: o resultado do produto escalar entre dois vetores, representado por ".", é um escalar. **OBS.:** Não existe produto escalar entre escalares e nem entre um escalar e um vetor!

Ex: sejam dois vetores quaisquer, $\vec{u}$ e $\vec{v}$, logo,

$$\vec{u}.\vec{v} = \left(u_x\vec{i} + u_y\vec{j} + u_z\vec{k}\right).\left(v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}\right)$$

Aplicando a propriedade distributiva, tem-se:

$$= u_x v_x\left(\vec{i}.\vec{i}\right) + u_x v_y\left(\vec{i}.\vec{j}\right) + u_x v_z\left(\vec{i}.\vec{k}\right) + \ldots + u_z v_z\left(\vec{k}.\vec{k}\right)$$

OBS.: Por definição, o produto escalar entre dois vetores ortogonais unitários "a" e "b" quaisquer é dado por, sendo **θ** o ângulo formado entre os dois vetores:

$$\vec{a}.\vec{b} = \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\left(\theta\right) \quad \text{se} \quad \begin{cases} \vec{a} = \vec{b}, \quad \cos(0) = 1 \text{ e } \ \vec{a}.\vec{b} = 1.1.1 = 1 \\ \vec{a} \neq \vec{b}, \quad \cos(90) = 0 \text{ e } \ \vec{a}.\vec{b} = 1.1.0 = 0 \end{cases}$$

Logo, retornando à equação anterior, tem-se:

$$\vec{u}.\vec{v}\boxed{= u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z} \longrightarrow \boxed{\text{Escalar}}$$

Professor Dyrney Araújo dos Santos
Universidade Federal de Goiás
Pós-Graduação em Engenharia Química
site: www.dyrney.com

1. Introdução

1.2 Álgebra Tensorial

iv) Produto Vetorial entre Vetores: o resultado do produto vetorial entre dois vetores, representado por "×", é um vetor normal ao plano definido pelos vetores. **OBS.:** <u>Não existe produto vetorial entre escalares e nem entre um escalar e um vetor!</u>

Ex: sejam dois vetores quaisquer, $\vec{u}$ e $\vec{v}$, logo,

$$\vec{u}\times\vec{v}=\left(u_x\vec{i}+u_y\vec{j}+u_z\vec{k}\right)\times\left(v_x\vec{i}+v_y\vec{j}+v_z\vec{k}\right)$$

Aplicando a propriedade distributiva, tem-se:

$$=u_x v_x\left(\vec{i}\times\vec{i}\right)+u_x v_y\left(\vec{i}\times\vec{j}\right)+u_x v_z\left(\vec{i}\times\vec{k}\right)+\ldots+u_z v_z\left(\vec{k}\times\vec{k}\right)$$

OBS.: Por definição, o produto vetorial entre dois vetores ortogonais unitários "a" e "b" quaisquer é dado por, sendo θ o ângulo formado entre os dois vetores e "n" o vetor unitário perpendicular, tanto ao vetor "a", quanto ao vetor "b" :

$$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{n}\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|sen\left(\theta\right)$$

OBS.: Nota-se que sen(θ) será +1, 0 e -1 quando o ângulo entre "a" e "b" for 90°, 0 e -90°, respectivamente. Usa-se a "Regra da Mão Direita" para se determinar o sentido do novo vetor.

Professor Dyrney Araújo dos Santos
Universidade Federal de Goiás
Pós-Graduação em Engenharia Química
site: www.dyrney.com

1. Introdução

1.2 Álgebra Tensorial

iv) Produto Vetorial entre Vetores: o resultado do produto vetorial entre dois vetores, representado por "×", é um vetor normal ao plano definido pelos vetores. **OBS.:** Não existe produto vetorial entre escalares e nem entre um escalar e um vetor!

Desta forma, tem-se:

$$\boxed{\vec{i}\times\vec{i}=\vec{j}\times\vec{j}=\vec{k}\times\vec{k}=0}$$

$$\boxed{\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}} \quad \boxed{\vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k}} \quad \boxed{\vec{j}\times\vec{k}=\vec{i}} \quad \boxed{\vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i}} \quad \boxed{\vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}} \quad \boxed{\vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j}}$$

Logo, retornando à equação anterior, tem-se:

$$\vec{u}\times\vec{v}\boxed{=\left(u_y v_z-u_z v_y\right)\vec{i}+\left(u_z v_x-u_x v_z\right)\vec{j}+\left(u_x v_y-u_y v_x\right)\vec{k}}$$

OBS.: O mesmo resultado acima pode ser obtido pela resolução do seguinte determinante de matriz

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ u_x & u_y & u_z\\ v_x & v_y & v_z\end{vmatrix}$$

Professor Dyrney Araújo dos Santos
Universidade Federal de Goiás
Pós-Graduação em Engenharia Química
site: www.dyrney.com

1. Introdução

1.2 Álgebra Tensorial

v) Produto Triplo entre Vetores: o resultado do produto triplo entre vetores é um escalar.

Ex: sejam três vetores quaisquer, $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$, logo,

OBS.: verifique abaixo a importância em se saber o resultado da operação (ex.: se resultará em escalar, vetor, etc.) para que se saiba por onde começar a operação (pelo "." ou "×"?)

$$\vec{u}.\vec{v}\times\vec{w} = \vec{u}.(\vec{v}\times\vec{w}) = \left(u_x\vec{i} + u_y\vec{j} + u_z\vec{k}\right).\left[\left(v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}\right)\times\left(w_x\vec{i} + w_y\vec{j} + w_z\vec{k}\right)\right]$$

Aplicando a propriedade distributiva e as propriedades do produto escalar e vetorial, feitas anteriormente, tem-se, após rearranjo:

$$\vec{u}.(\vec{v}\times\vec{w}) \boxed{= u_y v_z w_x + u_z v_x w_y + u_x v_y w_z - u_z v_y w_x - u_y v_x w_z - u_x v_z w_y}$$

OBS.: O mesmo resultado acima pode ser obtido pela resolução do seguinte determinante de matriz

$$\vec{u}.(\vec{v}\times\vec{w}) = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix}$$

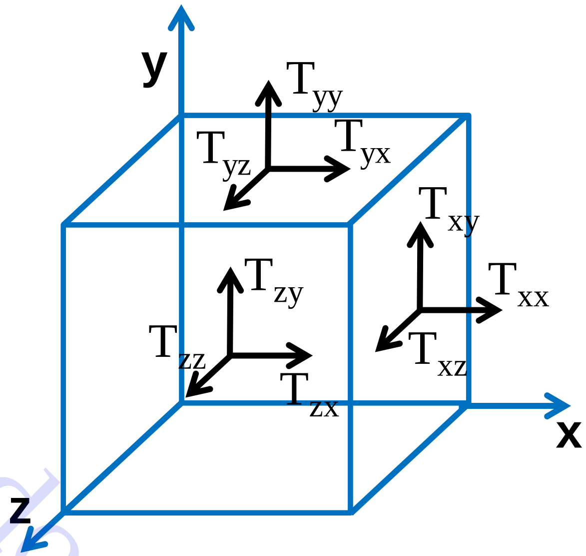
Professor Dyrney Araújo dos Santos
Universidade Federal de Goiás
Pós-Graduação em Engenharia Química
site: www.dyrney.com

1. Introdução

1.2 Álgebra Tensorial

c) Grandeza Tensorial: um tensor, ao contrário de um vetor, possui 9 componentes, originadas das interações de uma força (3 componentes) sobre uma superfície (3 possibilidades de ação). Logo, um tensor possui 3 componentes em cada direção espacial.

$$T = \frac{F}{A} \longrightarrow \boxed{\text{Possui unidades no S.I. em } N/m^2 \text{ ou Pa}}$$



Representação geral do tensor T_{ij}

i = direção normal à aplicação da força

j = direção da força

Existem dois tipos básicos de tensões que agem sobre uma superfície:

Tensões normais: **agem perpendicularmente à face do cubo (T_{ii} ou T_{jj})**

Tensões de cisalhamento: **agem tangencialmente à face do cubo (T_{ij}).**

1. Introdução

1.2 Álgebra Tensorial

c) Grandeza Tensorial: um tensor, ao contrário de um vetor, possui 9 componentes, originadas das interações de uma força (3 componentes) sobre uma superfície (3 possibilidades de ação). Logo, um tensor possui 3 componentes em cada uma das três direções espaciais.

OBS.: As componentes de um tensor podem ser melhor representadas na forma matricial (matriz 3×3), sendo "i" relacionado às linhas e "j" às colunas. Este formato matricial facilita nas seguintes identificações:

$$T = \begin{pmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{pmatrix}$$

A diagonal principal representa os tensores normais, sendo os demais cisalhantes

1ª coluna: componentes de T que agem na direção "i" ou "x"

2ª coluna: componentes de T que agem na direção "j" ou "y"

3ª coluna: componentes de T que agem na direção "k" ou "z"

OBS.: Visto que cada coluna representa as componentes do tensor que agem em uma determinada direção, em termos das direções i, j e k, T pode ser representado como:

$$T = \left(T_{xx}, T_{yx}, T_{zx}\right)\vec{i} + \left(T_{xy}, T_{yy}, T_{zy}\right)\vec{j} + \left(T_{xz}, T_{yz}, T_{zz}\right)\vec{k}$$

Professor Dyrney Araújo dos Santos
Universidade Federal de Goiás
Pós-Graduação em Engenharia Química
site: www.dyrney.com

1. Introdução

1.2 Álgebra Tensorial

Exemplos de Operações Envolvendo Tensores

i) Soma de Tensores: **o resultado da soma entre tensores é um tensor.**

Ex: **sejam dois tensores quaisquer,** T **e** S**, logo:**

$$T+S=\begin{pmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} S_{xx} & S_{xy} & S_{xz} \\ S_{yx} & S_{yy} & S_{yz} \\ S_{zx} & S_{zy} & S_{zz} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} T_{xx}+S_{xx} & T_{xy}+S_{xy} & T_{xz}+S_{xz} \\ T_{yx}+S_{yx} & T_{yy}+S_{yy} & T_{yz}+S_{yz} \\ T_{zx}+S_{zx} & T_{zy}+S_{zy} & T_{zz}+S_{zz} \end{pmatrix}$$

Ou, de outra forma

$$T+S=\left[\left(T_{xx}+S_{xx}\right),\left(T_{yx}+S_{yx}\right),\left(T_{zx}+S_{zx}\right)\right]\vec{i}+$$
$$+\left[\left(T_{xy}+S_{xy}\right),\left(T_{yy}+S_{yy}\right),\left(T_{zy}+S_{zy}\right)\right]\vec{j}+$$
$$+\left[\left(T_{xz}+S_{xz}\right),\left(T_{yz}+S_{yz}\right),\left(T_{zz}+S_{zz}\right)\right]\vec{k}$$

1. Introdução

1.2 Álgebra Tensorial

ii) Produto escalar entre um Vetor e um Tensor: o resultado do produto escalar entre um vetor e um tensor é um vetor.

Ex: seja um vetor $\vec{u}$ e um tensor T , logo:

$$\vec{u}.T = \left(u_x\vec{i} + u_y\vec{j} + u_z\vec{k}\right).\begin{pmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{pmatrix}$$

Ou, de outra forma

$$\vec{u}.T = \left(u_xT_{xx} + u_yT_{yx} + u_zT_{zx}\right)\vec{i} +$$
$$+\left(u_xT_{xy} + u_yT_{yy} + u_zT_{zy}\right)\vec{j} +$$
$$+\left(u_xT_{xz} + u_yT_{yz} + u_zT_{zz}\right)\vec{k}$$

Professor Dyrney Araújo dos Santos
Universidade Federal de Goiás
Pós-Graduação em Engenharia Química
site: www.dyrney.com

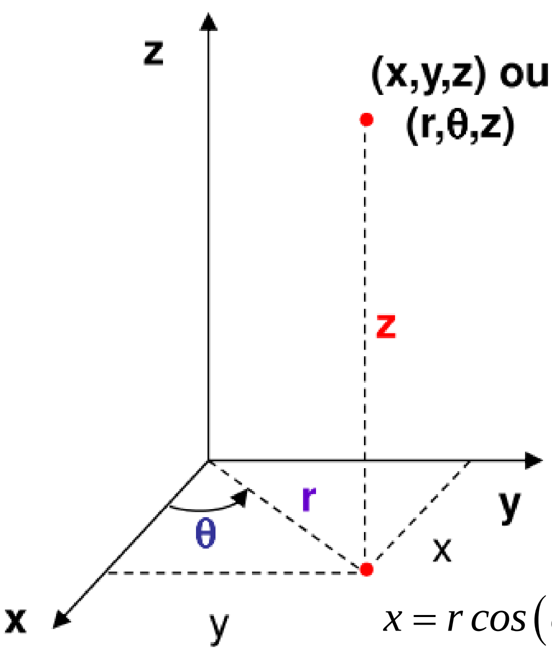
1. Introdução

1.2 Álgebra Tensorial

d) Operador Nabla (∇): é um vetor e representa a derivada ou taxa de variação espacial de uma grandeza nas três direções espaciais. Em coordenadas cartesianas, pode ser representado como:

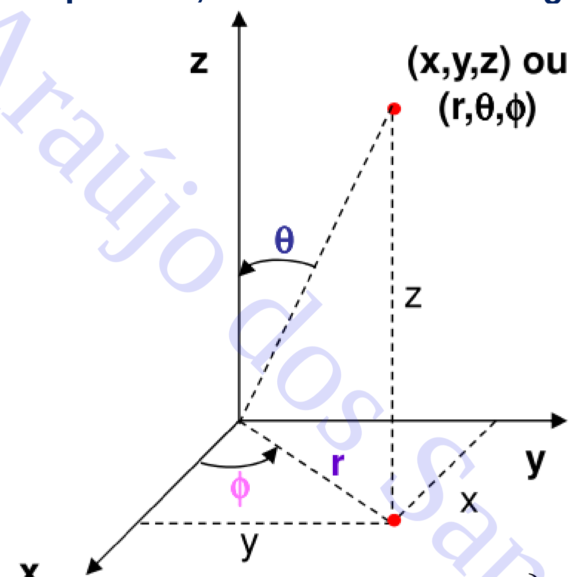
$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}(\ )\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}(\ )\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}(\ )\vec{k}$$

OBS.: O operador nabla pode ser aplicado, também, em coordenas cilíndricas e esféricas, após as transformações dos vetores unitários e das derivadas parciais, de acordo com as figuras abaixo



Coordenadas Cilíndricas

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos(\theta) \\ y &= r sen(\theta) \\ z &= z \end{aligned}\right\} \begin{aligned} r &= \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta &= \arctan y/x \\ z &= z \end{aligned}$$



Coordenadas Esféricas

$$\left.\begin{aligned} x &= r sen(\theta)\cos(\phi) \\ y &= r sen(\theta) sen(\phi) \\ z &= r\cos(\theta) \end{aligned}\right\} \begin{aligned} r &= \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \theta &= \arctan\left(\sqrt{x^2+y^2}/z\right) \\ z &= \arctan y/x \end{aligned}$$

1. Introdução

1.2 Álgebra Tensorial

Desta forma, após aplicar a regra da cadeia nas respectivas derivadas e rearranjar, o operador nabla em coordenadas cilíndricas e esféricas, se torna, respetivamente:

Coordenadas Cilíndricas

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial r}(\ )\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(\ )\vec{e}_\theta + \frac{\partial}{\partial z}(\ )\vec{e}_z$$

e

Coordenadas Esféricas

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial r}(\ )\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(\ )\vec{e}_\theta + \frac{1}{rsen(\theta)}\frac{\partial}{\partial \phi}(\ )\vec{e}_\phi$$

sendo: e_r, e_θ, e_ϕ e e_z, os vetores unitários das direções radial, circunferencial, azimutal e axial, respectivamente (são usados para diferenciar dos vetores unitários *i*, *j* e *k* do sistema cartesiano)

Existem diferentes operações em fenômenos de transporte envolvendo o operador nabla aplicado a escalares, vetores e tensores. Seguem alguns exemplos:

- **Gradiente de um Escalar: é um vetor que representa, fisicamente, o aumento espacial de uma determinada grandeza (ele sempre “aponta” para o sentido de crescimento de uma grandeza física). De uma forma geral, para um escalar C qualquer, tem-se:**

$$\nabla C = C\left[\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right] \rightarrow$$

Coordenada cartesiana

$$\boxed{\nabla C = \frac{\partial C}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial C}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial C}{\partial z}\vec{k}}$$

ou

$$\boxed{\nabla C = \frac{\partial C}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial C}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{\partial C}{\partial z}\vec{e}_z}$$

Coordenada Cilíndrica

ou

$$\boxed{\nabla C = \frac{\partial C}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial C}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{rsen(\theta)}\frac{\partial C}{\partial \phi}\vec{e}_\phi}$$

Coordenada Esférica

Ex: o gradiente de pressão, em coordenadas cartesianas, é representado como: $\nabla P = \frac{\partial P}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial P}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial P}{\partial z}\vec{k}$

1. Introdução

1.2 Álgebra Tensorial

- **Divergente de um Vetor ($\nabla.$): é um escalar que representa, fisicamente, "uma taxa de deformação" de uma determinada grandeza. De uma forma geral, para um vetor $\vec{C}$ qualquer, tem-se, em coordenada cartesiana:**

$$\nabla.\vec{C}=\left[\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right].\left[C_x\vec{i}+C_y\vec{j}+C_z\vec{k}\right] \longrightarrow \boxed{\nabla.\vec{C}=\frac{\partial C_x}{\partial x}+\frac{\partial C_y}{\partial y}+\frac{\partial C_z}{\partial z}}$$

OBS.: o divergente do mesmo vetor em coordenadas cilíndricas e esféricas, se torna, respetivamente:

Coordenada Cilíndrica

$$\boxed{\nabla.\vec{C}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rC_r\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial C_\theta}{\partial \theta}+\frac{\partial C_z}{\partial z}}$$

Coordenada Esférica

$$\boxed{\nabla.\vec{C}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2C_r\right)+\frac{1}{rsen\left(\theta\right)}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(sen\left(\theta\right)C_\theta\right)+\frac{1}{rsen\left(\theta\right)}\frac{\partial C_\phi}{\partial \phi}}$$

Ex: o divergente do vetor velocidade de escoamento de um fluido $\vec{V}$ pode ser representado abaixo, em coordenada cartesiana (daqui pra frente, iremos sempre representar as componentes do vetor velocidade de escoamento de um fluido como: *u*, *v* e *w*, nas direções *x*, *y* e *z*, respectivamente):

$$\vec{V}=u\vec{i}+v\vec{j}+w\vec{k} \longrightarrow \nabla.\vec{V}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}$$

OBS.:

Se $\nabla.\vec{V}<0 \rightarrow$ **compressão do fluido**

Se $\nabla.\vec{V}=0 \rightarrow$ **escoamento incompressível**

Se $\nabla.\vec{V}>0 \rightarrow$ **espansão do fluido**

Professor Dyrney Araújo dos Santos
Universidade Federal de Goiás
Pós-Graduação em Engenharia Química
site: www.dyrney.com

1. Introdução

1.2 Álgebra Tensorial

- **Divergente de um Tensor ($\nabla.$): o divergente de um tensor T origina um vetor, como mostrado abaixo, em coordenada cartesiana:**

$$\nabla.T = \left[\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k} \right] . \begin{pmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{pmatrix}$$

ou

$$\boxed{\nabla.T = \left(\frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial T_{zx}}{\partial z} \right)\vec{i} + \left(\frac{\partial T_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{zy}}{\partial z} \right)\vec{j} + \left(\frac{\partial T_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} \right)\vec{k}}$$

OBS.: o divergente do mesmo tensor em coordenadas cilíndricas e esféricas, se torna, respetivamente:

Coordenada Cilíndrica

$$\boxed{\nabla.T = \left[\frac{\partial T_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial T_{\theta r}}{\partial \theta} + \frac{\partial T_{zr}}{\partial z} + \frac{1}{r}\left(T_{rr} - T_{\theta\theta}\right) \right]\vec{e}_r + \left[\frac{\partial T_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial T_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial T_{z\theta}}{\partial z} + \frac{1}{r}\left(T_{r\theta} + T_{\theta\theta}\right) \right]\vec{e}_\theta + \left(\frac{\partial T_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial T_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} + \frac{T_{rz}}{r} \right)\vec{e}_z}$$

Coordenada Esférica

$$\boxed{\begin{aligned} \nabla.T = &\left[\frac{\partial T_{rr}}{\partial r} + 2\frac{T_{rr}}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial T_{\theta r}}{\partial \theta} + \frac{\cot(\theta)}{r}T_{\theta r} + \frac{1}{rsen(\theta)}\frac{\partial T_{\phi r}}{\partial \phi} - \frac{1}{r}\left(T_{\theta\theta} - T_{\phi\phi}\right) \right]\vec{e}_r + \\ &+\left[\frac{\partial T_{r\theta}}{\partial r} + 2\frac{T_{r\theta}}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial T_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\cot(\theta)}{r}T_{\theta\theta} + \frac{1}{rsen(\theta)}\frac{\partial T_{\phi\theta}}{\partial \phi} + \frac{T_{\theta r}}{r} - \frac{\cot(\theta)}{r}T_{\phi\phi} \right]\vec{e}_\theta + \\ &+\left(\frac{\partial T_{r\phi}}{\partial r} + 2\frac{T_{r\phi}}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial T_{\theta\phi}}{\partial \theta} + \frac{1}{rsen(\theta)}\frac{\partial T_{\phi\phi}}{\partial \phi} + \frac{T_{\phi r}}{r} + \frac{\cot(\theta)}{r}\left(T_{\theta\phi} + T_{\phi\theta}\right) \right)\vec{e}_\phi \end{aligned}}$$

Professor Dyrney Araújo dos Santos
Universidade Federal de Goiás
Pós-Graduação em Engenharia Química
site: www.dyrney.com

1. Introdução

1.2 Álgebra Tensorial

- **Laplaciano de um Escalar ($\nabla.\nabla$ ou ∇^2): o laplaciano de um escalar C qualquer origina um escalar, como mostrado abaixo em coordenada cartesiana:**

$$\nabla.\nabla C=\left[\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right].\left[\frac{\partial C}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial C}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial C}{\partial z}\vec{k}\right] \longrightarrow \boxed{\nabla^2 C=\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 C}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 C}{\partial z^2}}$$

OBS.: o laplaciano do mesmo escalar em coordenadas cilíndricas e esféricas, se torna, respetivamente:

Coordenada Cilíndrica

$$\boxed{\nabla^2 C=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial C}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 C}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 C}{\partial z^2}}$$

Coordenada Esférica

$$\boxed{\nabla^2 C=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial C}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2 sen(\theta)}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(sen(\theta)\frac{\partial C}{\partial \theta}\right)+\frac{1}{r^2 sen^2(\theta)}\frac{\partial^2 C}{\partial \phi^2}}$$

- **Rotacional de um Vetor ($\nabla\times$): o rotacional de um vetor $\vec{C}$ qualquer origina um vetor perpendicular à superfície formada pelos outros vetores, como mostrado abaixo em coordenada cartesiana:**

$$\nabla\times\vec{C}=\left[\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right]\times\left[C_x\vec{i}+C_y\vec{j}+C_z\vec{k}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ C_x & C_y & C_z\end{vmatrix}$$

Professor Dyrney Araújo dos Santos
Universidade Federal de Goiás
Pós-Graduação em Engenharia Química
site: www.dyrney.com

1. Introdução

1.2 Álgebra Tensorial

ou seja:

$$\nabla\times\vec{C}=\left(\frac{\partial C_z}{\partial y}-\frac{\partial C_y}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial C_x}{\partial z}-\frac{\partial C_z}{\partial x}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial C_y}{\partial x}-\frac{\partial C_x}{\partial y}\right)\vec{k}$$

OBS.: o rotacional do mesmo vetor em coordenadas cilíndricas e esféricas, se torna, respetivamente:

Coordenada Cilíndrica

$$\nabla\times\vec{C}=\left(\frac{1}{r}\frac{\partial C_z}{\partial\theta}-\frac{\partial C_\theta}{\partial z}\right)\vec{e}_r+\left(\frac{\partial C_r}{\partial z}-\frac{\partial C_z}{\partial r}\right)\vec{e}_\theta+\left\{\frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(rC_\theta\right)-\frac{\partial C_r}{\partial\theta}\right)\right\}\vec{e}_z$$

Coordenada Esférica

$$\nabla\times\vec{C}=\frac{1}{rsen(\theta)}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(C_\phi sen(\theta)\right)-\frac{\partial C_\theta}{\partial\phi}\right]\vec{e}_r+\left[\frac{1}{rsen(\theta)}\frac{\partial C_r}{\partial\phi}-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rC_\phi\right)\right]\vec{e}_\theta+\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(rC_\theta\right)-\frac{\partial C_r}{\partial\theta}\right]\vec{e}_\phi$$

Ex: o rotacional do vetor velocidade de escoamento de um fluido $\vec{V}$, também conhecido como "Vetor Vorticidade" ($\vec{\omega}$) pode ser representado abaixo, em coordenadas cartesianas:

$$\vec{\omega}=\nabla\times\vec{V}=\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)\vec{k}$$

OBS.:

Se $\nabla\times\vec{V}\neq 0 \rightarrow$ **escoamento rotacional**

Se $\nabla\times\vec{V}=0 \rightarrow$ **escoamento irrotacional**

O sentido da rotação é dado pela "Regra da Mão Direita"

Professor Dyrney Araújo dos Santos
Universidade Federal de Goiás
Pós-Graduação em Engenharia Química
site: www.dyrney.com

1. Introdução

1.2 Álgebra Tensorial

Representação dos diferentes tipos de Campos

a) Campo Escalar: representação do valor da grandeza escalar como uma função do espaço, (x, y, z), no caso de coordenadas cartesianas, e do tempo (t)

Ex: campo escalada da massa específica (ρ) em coordenadas cartesianas

$$\rho = \rho(x, y, z, t)$$

b) Campo Vetorial: a grandeza vetorial é composta por três (3) componentes escalares, sendo que cada componente do campo vetorial é uma função do espaço (x, y, z), no caso de coordenadas cartesianas, e do tempo (t)

$$\vec{V} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k} \quad \begin{cases} u = u(x, y, z, t) \\ v = v(x, y, z, t) \\ w = w(x, y, z, t) \end{cases}$$

c) Campo Tensorial: a grandeza tensorial é composta por nove (9) componentes escalares, sendo que cada componente do campo tensorial é uma função do espaço (x, y, z), no caso de coordenadas cartesianas, e do tempo (t)

$$T = \begin{pmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{pmatrix} \quad \begin{cases} \mathrm{T_{xx}} = \mathrm{T_{xx}}(x, y, z, t) & \mathrm{T_{yx}} = \mathrm{T_{yx}}(x, y, z, t) & \mathrm{T_{zx}} = \mathrm{T_{zx}}(x, y, z, t) \\ \mathrm{T_{xy}} = \mathrm{T_{xy}}(x, y, z, t) & \mathrm{T_{yy}} = \mathrm{T_{yy}}(x, y, z, t) & \mathrm{T_{zy}} = \mathrm{T_{zy}}(x, y, z, t) \\ \mathrm{T_{xz}} = \mathrm{T_{xz}}(x, y, z, t) & \mathrm{T_{yz}} = \mathrm{T_{yz}}(x, y, z, t) & \mathrm{T_{zz}} = \mathrm{T_{zz}}(x, y, z, t) \end{cases}$$

1. Introdução

1.2 Álgebra Tensorial

Classificação e Principais Características de um Campo

A depender das características de um determinado campo, o mesmo pode ser classificado em:

I – Campo Permanente ou Estacionário: aquele cujas componentes não variam com o tempo

Ex.: $\rho=\rho(x,y,z);\quad \rho=\rho(x,y);\quad \rho=\rho(x)$

II – Campo Transiente ou Não-Estacionário: aquele cujas componentes variam com o tempo

Ex.: $\rho=\rho(x,y,z,t);\quad \rho=\rho(x,y,t);\quad \rho=\rho(x,t);\ \rho=\rho(t)$

III – Campo Uniforme: aquele cujas componentes não variam com a posição espacial

Ex.: $\rho=\rho(t)$

IV – Campo Unidimensional: aquele cujas componentes variam ao longo de uma única direção espacial

Ex.: $\rho=\rho(x);\quad \rho=\rho(y);\quad \rho=\rho(z);\ \rho(x,t);\quad \rho=\rho(y,t);\quad \rho=\rho(z,t)$

V – Campo Bidimensional: aquele cujas componentes variam ao longo de duas direções espaciais

Ex.: $\rho=\rho(x,y);\quad \rho=\rho(x,z);\quad \rho=\rho(y,z);\ \rho(x,y,t);\quad \rho=\rho(x,z,t);\ \rho=\rho(y,z,t)$

VI – Campo Tridimensional: aquele cujas componentes variam em todas as três direções espaciais

Ex.: $\rho=\rho(x,y,z);\quad \rho=\rho(x,y,z,t)$

Bibliografia

BIRD, R.B.; STEWART, W.E. e; LIGHTFOOT, E.N. Fenômenos de transporte, 2ª ed., LTC, 2004.

ÇENGEL, Y.A e CIMBALA, J.M.; Mecânica dos fluidos, McGraw Hill, 3ª edição, 2015.

WHITE, F. M. Mecânica dos Fluidos. 6ª edição. MCGRAW-HILL, 2011.

Instituto de Química
IQ - UFG

ENGENHARIA QUÍMICA
Universidade Federal de Goiás

Conceito de Fluido e Reologia

Professor Dyrney Araújo dos Santos
Universidade Federal de Goiás
Curso de Pós Graduação em Engenharia Química
Disciplina: Fenômenos de Transporte
site: www.dyrney.com

2. Conceito de Fluido e Reologia

2.1 O Conceito de Fluido

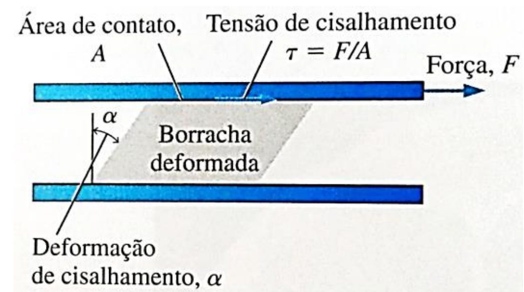
Considerações Preliminares

Do ponto de vista da mecânica dos fluidos, toda a matéria encontra-se em somente dois estados: fluido e sólido

Líquido

gás

Fluido



Fonte: Çengel e Cimbala (2015)

sólido

- um fluido não resiste a aplicação de uma tensão de cisalhamento e escoa, deformando-se continuamente, não importando o quão pequena ela for;
- nos fluidos, a tensão é proporcional à taxa de deformação (variação da deformação ou deslocamento angular com o tempo);
- sob uma tensão de cisalhamento constante, um fluido nunca para de deformar-se, porém a taxa de deformação tende para um valor constante;

- um sólido resiste à tensão de cisalhamento aplicada deformando-se e pode retornar ao seu estado inicial caso a força não ultrapasse o regime elástico;
- nos sólidos, a tensão é proporcional à deformação (deslocamento angular);
- sob uma tensão de cisalhamento constante, o sólido para de deformar-se num certo ângulo de deformação fixo;

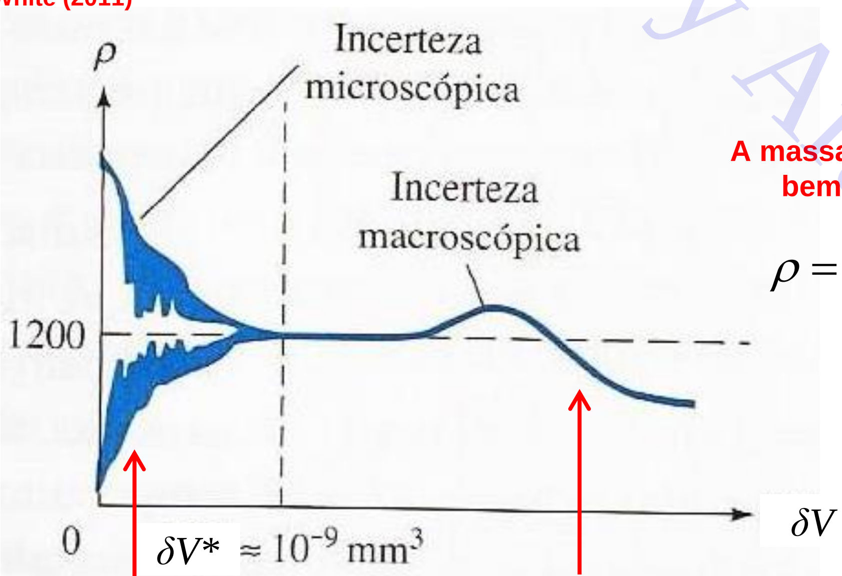
2. Conceito de Fluido e Reologia

2.1 O Conceito de Fluido

O Fluido como um meio Contínuo

Hipótese do Contínuo: Apesar de um fluido ser composto por moléculas que podem estar bem espaçadas, considera-se que qualquer propriedade do fluido (densidade, etc.) varia continuamente no espaço sem saltos de descontinuidade. Logo, o fluido é tratado não a nível molecular mas a nível de partícula ou elemento de fluido, onde neste pequeno volume composto por várias moléculas, o fluido preserva todas as características físicas do material.

Fonte: White (2011)



Variações moleculares tornam-se importantes

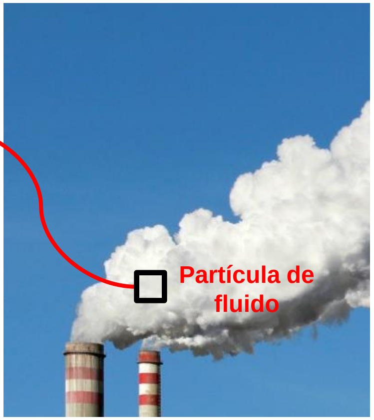
Variações de agregações tornam-se importantes

A massa específica é mais bem definida como

$$\rho = \lim_{\delta V \to \delta V^*} \frac{\delta m}{\delta V}$$

Ordem de grandeza de uma partícula de fluido

$$\delta V^* \approx 10^{-9}\ mm^3$$



OBS.: 1 mol de gás (T=25ºC e P=1atm) ocupa 24,5 L e contem $6x10^{23}$ moléculas.

1 partícula de fluído (gás), nas mesmas condições, possui $2,45x10^{13}$ moléculas

Logo, o conceito de contínuo pela média das moléculas é justificado pelo grande número de moléculas

Meio Contínuo: a variação de suas propriedades é tão suave que o cálculo diferencial pode ser usado para analisar a substância.

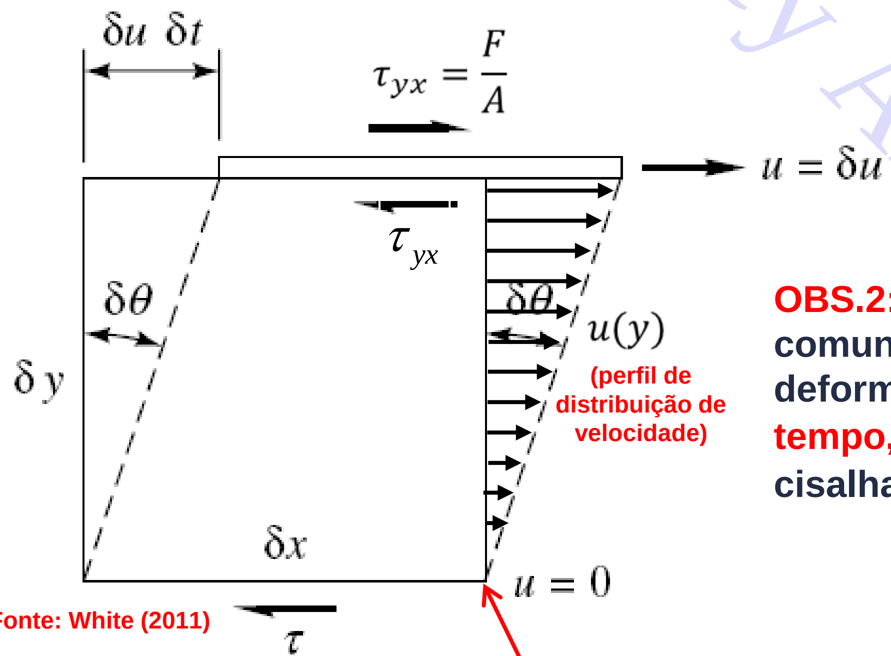
Professor Dyrney Araújo dos Santos
Universidade Federal de Goiás
Pós-Graduação em Engenharia Química
site: www.dyrney.com

2. Conceito de Fluido e Reologia

2.2 Tensão Aplicada a Fluidos

Reologia: parte da ciência que estuda o comportamento da deformação dos fluidos frente à tensão cisalhante aplicada.

Considere abaixo uma camada de fluido entre duas placas paralelas separadas por uma distância δy. Aplica-se então uma tensão de cisalhamento τ na placa superior, enquanto a placa inferior é mantida fixa.



Fonte: White (2011)

OBS.1: o ângulo de deformação $\delta\theta$ cresce continuamente com o tempo enquanto a tensão τ_{yx} for mantida.

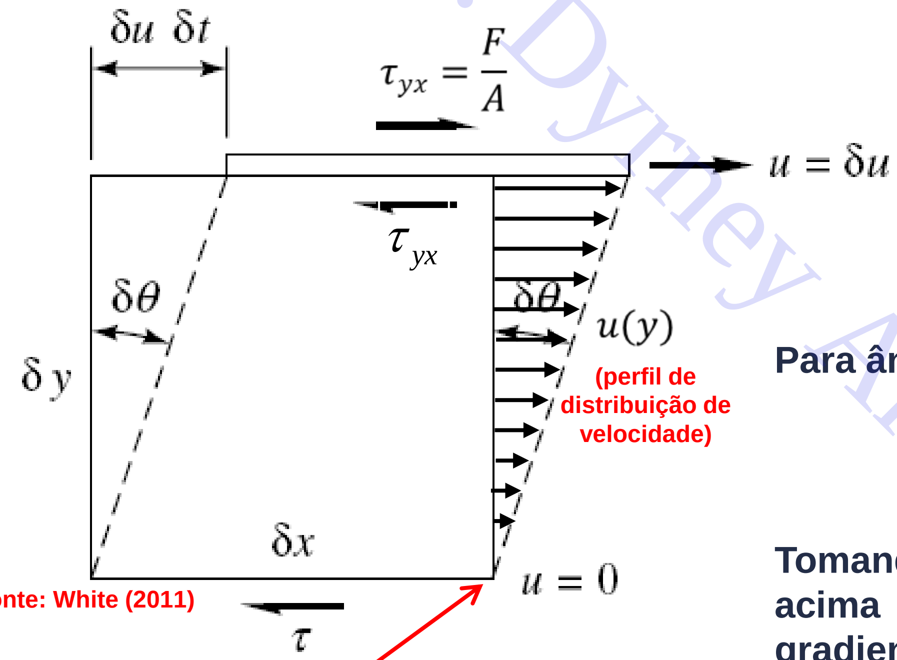
OBS.2: observa-se experimentalmente que, para fluidos comuns como água, gasolina, óleos e ar, a taxa de deformação (variação do ângulo de deformação com o tempo, $\delta\theta/\ \delta t$) é diretamente proporcional à tensão de cisalhamento aplicada (τ_{yx}). Logo:

$$\tau_{yx} \propto \frac{\delta\theta}{\delta t}$$

Condição de não-deslizamento: o fluido em contato direto com uma fronteira sólida adquire sua velocidade (velocidade relativa nula), ou seja, "gruda" na superfície e não há escorregamento.

2. Conceito de Fluido e Reologia

2.2 Tensão Aplicada a Fluidos



Fonte: White (2011)

Condição de não-deslizamento: o fluido em contato direto com uma fronteira sólida adquire sua velocidade (velocidade relativa nula), ou seja, "gruda" na superfície e não há escorregamento.

Aplicando a tangente sobre o ângulo δθ da figura ao lado, tem-se:

$$tg\delta\theta = \frac{\delta u \delta t}{\delta y}$$

Para ângulos pequenos, tem-se:

$$tg\delta\theta \approx \delta\theta$$

Tomando-se o limite da variação infinitesimal, a equação acima se torna a relação entre a taxa de deformação e o gradiente de velocidade:

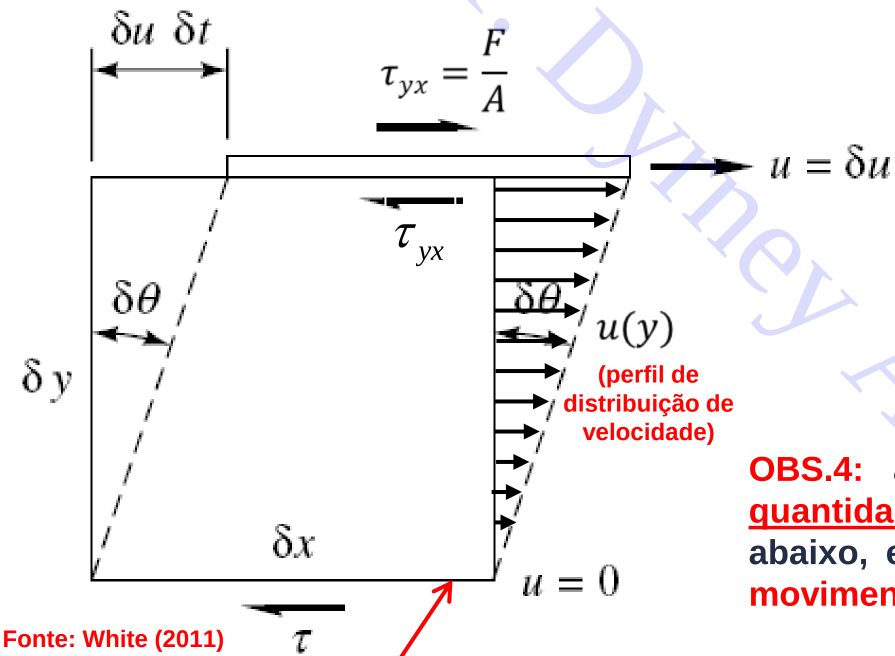
$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{du}{dy}$$

OBS.3: Desta forma, a tensão de cisalhamento aplicada é também proporcional ao gradiente de velocidade para os fluidos lineares comuns.

Professor Dyrney Araújo dos Santos
Universidade Federal de Goiás
Pós-Graduação em Engenharia Química
site: www.dyrney.com

2. Conceito de Fluido e Reologia

2.2 Tensão Aplicada a Fluidos



Fonte: White (2011)

Condição de não-deslizamento: o fluido em contato direto com uma fronteira sólida adquire sua velocidade (velocidade relativa nula), ou seja, "gruda" na superfície e não há escorregamento.

Logo,

$$\tau_{yx} \propto \frac{du}{dy}$$

A constante de proporcionalidade é denominada coeficiente de viscosidade ou viscosidade dinâmica (μ). Logo,

$$\boxed{\tau_{yx} = \mu \frac{du}{dy}}$$

OBS.4: a tensão também pode ser tratada como fluxo de quantidade de movimento ("mesma dimensão"), escrita como abaixo, e o sinal negativo indica que o fluxo de quantidade de movimento se dá de forma contrária ao gradiente de velocidade.

$$\tau_{yx} = \frac{\text{massa}\times\text{velocidade}}{\text{área}\times\text{tempo}} = -\mu \frac{du}{dy}$$

OBS.5: No caso da placa ao lado, o fluxo de quantidade de movimento vai da placa superior para a inferior, visto que o gradiente de velocidade "aponta" da inferior para a superior

OBS.6: Os fluidos lineares que seguem esta equação são chamados de Fluidos newtonianos em homenagem a sir. Isaac Newton (1642-1727)

Professor Dyrney Araújo dos Santos
Universidade Federal de Goiás
Pós-Graduação em Engenharia Química
site: www.dyrney.com

2. Conceito de Fluido e Reologia

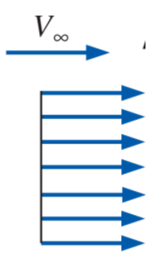
2.2 Tensão Aplicada a Fluidos

Comentários gerais sobre a distribuição de tensão viscosa no interior de escoamentos de fluidos newtonianos

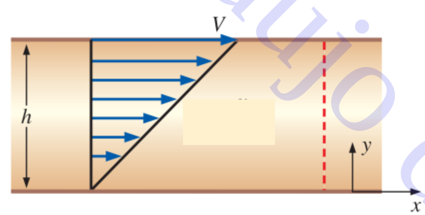
1) Lembre-se que o gradiente de velocidade presente na lei de Newton (Ex.: du/dy) é a tangente que passa pela função (perfil) de distribuição de velocidade em um determinado ponto no interior do escoamento (conceito de derivada).

2) A Lei de Newton diz que a tensão viscosa (força viscosa dividida pela área superficial de contato entre as camadas de fluido ou entre uma camada de fluido e uma superfície sólida) é proporcional ao gradiente de velocidade

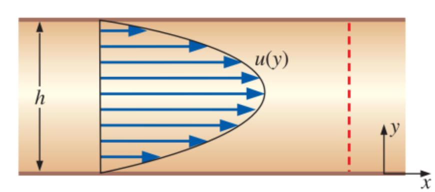
Alguns exemplos (Fonte das imagens: Çengel e Cimbala (2015)):



a) Perfil uniforme de velocidade: não existe tensão viscosa neste tipo de escoamento, pois o gradiente é nulo em qualquer posição em seu interior. Neste caso, ou o fluido é ideal, ou o escoamento está longe de paredes sólidas



b) Perfil linear de velocidade: a tensão viscosa é constante em qualquer posição no interior do escoamento, pois o gradiente é constante (inclinação constante)



c) Perfil parabólico de velocidade: a tensão viscosa varia com a posição no interior do escoamento, tendo um valor máximo na parede e um valor nulo na metade do perfil (centro)

3) Quanto maior for a tensão viscosa necessária para produzir o mesmo gradiente de velocidade, maior será a viscosidade do fluido

Professor Dyrney Araújo dos Santos
Universidade Federal de Goiás
Pós-Graduação em Engenharia Química
site: www.dyrney.com

2. Conceito de Fluido e Reologia

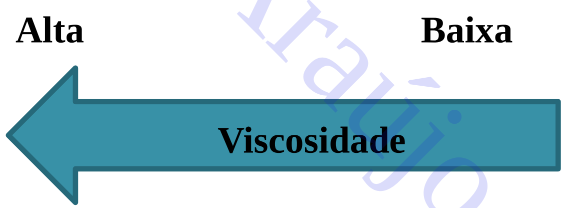
2.3 Viscosidade

Conceito de viscosidade de um fluido

Conceito macroscópico: A viscosidade dinâmica (μ) é uma medida quantitativa da resistência de um fluido ao escoamento.

Conceito microscópico: A viscosidade dinâmica (μ) tende a homogeneizar as velocidades relativas entre as camadas de fluido. A viscosidade resulta da força de atrito interno entre as diferentes camadas de fluidos.

Mel



Água

Unidades comuns da viscosidade dinâmica (μ)

Sistema Internacional (S.I.): kg/(m.s) = N.s/m² = Pa.s
Sistema CGS: g/(cm.s) = poise (P)

OBS.7: A viscosidade da água a 20°C é igual a 1,002 cP (centipoise) = 1,002x10^{-2} P. Desta forma, a unidade centipoise serve como uma referência útil

OBS.8: A razão entre a viscosidade dinâmica (μ) e a densidade (ρ) é denominada de viscosidade cinemática ($\nu = \mu/\rho$). Duas unidades comuns são m²/s e stoke (1 St = 1 cm²/s)

Professor Dyrney Araújo dos Santos
Universidade Federal de Goiás
Pós-Graduação em Engenharia Química
site: www.dyrney.com

2. Conceito de Fluido e Reologia

2.3 Viscosidade

Conceito de viscosidade de um fluido

- **Efeito da temperatura sobre a viscosidade dinâmica:** Forte
- **Efeito da pressão sobre a viscosidade dinâmica:** Moderado, considera-se desprezível para P ≤ 100atm

A viscosidade dos gases aumenta com a temperatura, visto que as colisões moleculares aumentam, aumentando, desta forma, a resistência ao escoamento.

$$\frac{\mu}{\mu_0} \approx \begin{cases} \left(\dfrac{T}{T_0}\right)^n & \text{Lei de Potência} \\ \dfrac{\left(T/T_0\right)^{3/2}\left(T_0+S\right)}{T+S} & \text{Lei de Sutherland} \end{cases}$$

A viscosidade dos líquidos diminui com a temperatura, visto que moléculas mais energizadas opõem-se mais intensamente às forças intermoleculares coesivas, diminuindo, desta forma, a resistência ao escoamento.

$$ln\left(\frac{\mu}{\mu_0}\right) \approx a + b\left(\frac{T_0}{T}\right) + c\left(\frac{T_0}{T}\right)^2$$

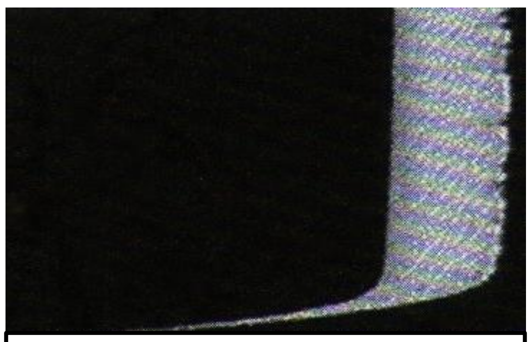
OBS.9: μ_0 é uma viscosidade conhecida a uma temperatura de referência T_0. As constantes n e S e a, b e c são ajustadas aos dados empíricos e depende do fluido

2. Conceito de Fluido e Reologia

2.4 Classificação dos Fluidos

Os fluidos podem ser classificados segundo várias terminologias. De acordo com a reologia, destacam-se:

a) Fluidos Ideais ou invíscidos: são aqueles cuja viscosidade dinâmica é nula ($\mu = 0$). Fisicamente, nenhum fluido possui essa propriedade mas, às vezes, é uma hipótese simplificadora útil em Engenharia como mostrado na imagem abaixo onde é mostrado o perfil de distribuição de velocidades em um fluido escoando sobre uma placa plana:



Região do escoamento onde os efeitos viscosos podem ser desprezados (região longe das paredes sólidas)

Região do escoamento onde os efeitos viscosos são importantes (somente aqui há a presença de gradiente de velocidade)

Fonte: Çengel e Cimbala (2015)

Placa plana

OBS.10: A região de escoamento adjacente à parede, na qual os efeitos viscosos e, portanto, os gradientes de velocidade, são significativos, é chamada de camada limite hidrodinâmica. Esta camada é formada devido à condição de não deslizamento e será vista com maiores detalhes no decorrer do curso.

b) Fluidos newtonianos: como dito anteriormente, são aqueles cuja taxa de deformação é proporcional à tensão aplicada (Lei de Newton). Adicionalmente, a viscosidade independe da tensão (viscosidade depende somente da pressão e da temperatura)

$$\tau_{yx} = \mu \frac{du}{dy}$$

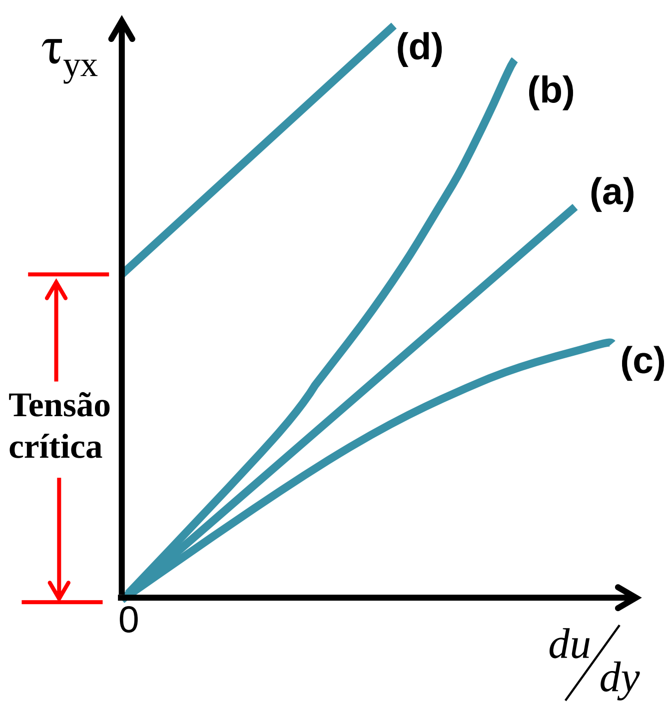
2. Conceito de Fluido e Reologia

2.4 Classificação dos Fluidos

Os fluidos podem ser classificados segundo várias terminologias. De acordo com a reologia, destacam-se:

c) Fluidos não-newtonianos: são aqueles que não seguem a lei linear de Newton. A viscosidade destes fluidos depende da tensão aplicada, além da temperatura e da pressão.

Representação Gráfica do Comportamento de Alguns tipos de Fluidos



(a) Fluido newtoniano (ou linear): a taxa de deformação é proporcional à tensão.
Ex.: água, ar, gasolina etc.

(b) Dilatante: a viscosidade "aparente" aumenta com o aumento da tensão aplicada.
Ex.: suspensões de amido, etc.

(c) Pseudoplástico: a viscosidade "aparente" diminui com o aumento da tensão aplicada.
Ex.: suspensões de polímeros, tintas etc.

(d) Fluido de Bingham: requer uma determinada tensão para começar a escoar.
Ex.: pasta de dente, ketchup, maionese, asfalto, etc.

2. Conceito de Fluido e Reologia

2.5 Representação Matemática de Fluidos Não-Newtonianos

Os fluidos não-newtonianos podem ser matematicamente descritos de forma similar aos fluidos newtonianos como:

$$\tau_{yx} = \eta \frac{du}{dy} \quad \text{ou} \quad \tau_{yx} = \eta D$$

sendo η a viscosidade aparente e *D* a taxa de deformação (gradiente de velocidade)

OBS.11: enquanto que nos fluidos newtonianos a viscosidade é constante a uma dada temperatura e pressão, nos fluidos não-newtonianos a viscosidade varia de acordo com a deformação sofrida

$$\eta = f\left(D\right)$$

Segundo a Lei de Potência (*Power-Law* ou fluidos de Ostwald de Waele), a viscosidade aparente pode ser correlacionada à taxa de deformação (*D*) da seguinte maneira:

$$\eta = \eta_0 D^{n-1}$$ sendo

- η_0 = viscosidade aparente inicial
- n = índice de comportamento do escoamento

2. Conceito de Fluido e Reologia

2.5 Representação Matemática de Fluidos Não-Newtonianos

Logo, tem-se:

$$\boxed{\tau_{ij} = \eta D = \left(\eta_0 D^{n-1}\right) D = \eta_0 D^n}$$

visto que η, é dado por (Lei de Potência) $\eta = \eta_0 D^{n-1}$

De acordo com a equação acima, conclui-se que:

I – Se $n = 1 \rightarrow \eta = \eta_0$ (constante) e o fluido comporta-se como newtoniano;

II – Se $n < 1 \rightarrow \eta = \eta_0/(D^{1-n})$ e o fluido comporta-se como pseudoplástico;

III – Se $n > 1 \rightarrow \eta = \eta_0 D^{n-1}$ e o fluido comporta-se como dilatante.

Para os Fluidos de Bingham, a relação entre a tensão e a taxa de deformação pode ser representada como:

$$\tau_{ij} = \tau_0 + \eta_0 D \quad \text{se} \quad \tau_{ij} > \tau_0$$

sendo τ_0 a tensão crítica

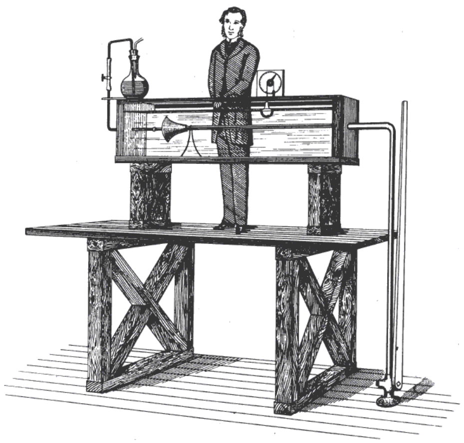
Professor Dyrney Araújo dos Santos
Universidade Federal de Goiás
Pós-Graduação em Engenharia Química
site: www.dyrney.com

2. Conceito de Fluido e Reologia

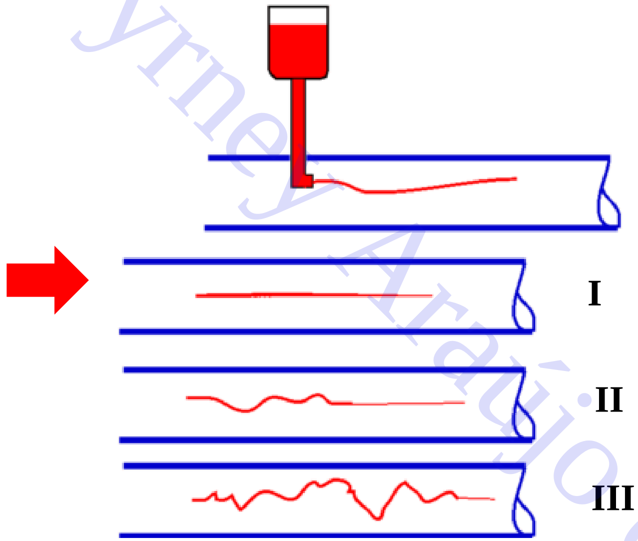
2.6 Classificação dos Escoamentos de Fluidos

Os escoamentos de fluidos podem ser classificados em:

a) Escoamentos Laminar e Turbulento



Experimento de Reynolds

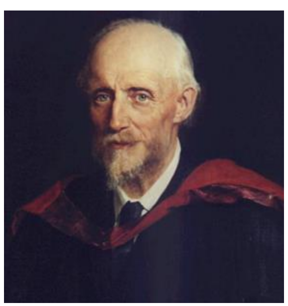


Fonte (modificado): www-mdp.eng.cam.ac.uk

I – Escoamento Laminar: baixas velocidades; fluido escoa como se fosse lâminas sobrepostas; forças viscosas sobressaem em relação às forças inerciais (Baixos Re).

II – Escoamento de Transição: velocidades intermediárias; laminas de fluido tendem a se perturbar; forças inerciais começam a ser tornar importantes.

III – Escoamento Turbulento: altas velocidades; partículas de fluido se misturam aleatoriamente; escoamento tridimensional e transiente; forças inerciais se sobressaem em relação às forças viscosas (Altos Re).



Osborne Reynolds
(1842 – 1912)
(Físico e engenheiro irlandês)

Número adimensional de Reynolds

$$\mathrm{Re} = \frac{\text{força inerciais}}{\text{forças viscosas}} = \frac{Lv\rho}{\mu}$$

Sendo: L, v, ρ e μ um comprimento característico, a velocidade média do fluido, a massa específica e a viscosidade dinâmica do fluido, respectivamente.

Professor Dyrney Araújo dos Santos
Universidade Federal de Goiás
Pós-Graduação em Engenharia Química
site: www.dyrney.com

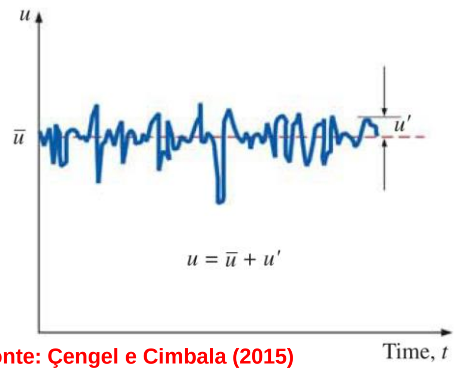
2. Conceito de Fluido e Reologia

2.6 Classificação dos Escoamentos de Fluidos

Os escoamentos de fluidos podem ser classificados em:

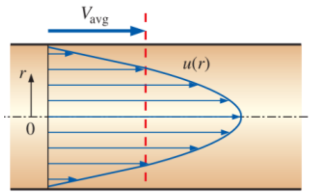
a) Escoamentos Laminar e Turbulento

Comentários gerais sobre escoamento laminar e turbulento

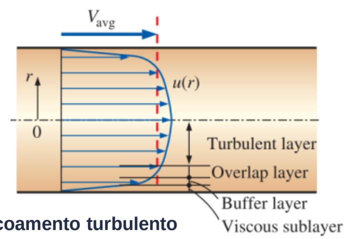


Fonte: Çengel e Cimbala (2015)

1) Em um escoamento turbulento, mesmo em regime "estacionário", a velocidade (dentre outras variáveis, tais como a temperatura, a concentração, etc.) sofre flutuações ao longo do tempo. Logo, qualquer variável instantânea (u) em um escoamento turbulento é representada como sendo a sua média temporal ($\overline{u}$) mais a sua flutuação (u'), ou seja $u = \overline{u} + u'$. Esta representação é conhecida como "Decomposição de Reynolds". OBS.: o termo "estacionário" dito no início se refere ao escoamento médio, visto que um escoamento turbulento é, por natureza, transiente.



Escoamento laminar



Escoamento turbulento

Fonte: Çengel e Cimbala (2015)

2) Comparando os perfis de distribuição de velocidades do escoamento laminar e turbulento (neste caso o perfil médio), percebe-se que a tensão viscosa na parede é maior para o escoamento turbulento do que para o laminar. Logo, no escoamento turbulento há um maior atrito do fluido sobre a parede, quando comparado com o escoamento laminar. Iremos ver, futuramente neste curso, que o projeto de sistemas de escoamento de fluidos depende fortemente do regime de escoamento em questão (laminar ou turbulento).

Professor Dyrney Araújo dos Santos
Universidade Federal de Goiás
Pós-Graduação em Engenharia Química
site: www.dyrney.com

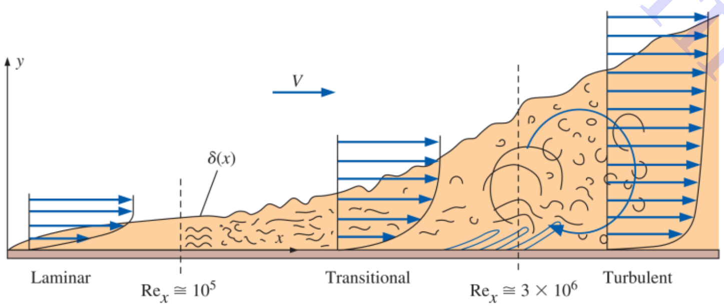
2. Conceito de Fluido e Reologia

2.6 Classificação dos Escoamentos de Fluidos

Os escoamentos de fluidos podem ser classificados em:

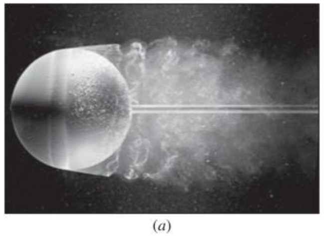
a) Escoamentos Laminar e Turbulento

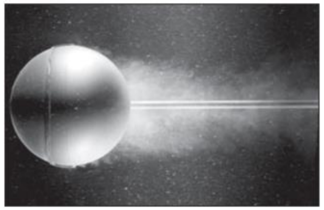
Comentários gerais sobre escoamento laminar e turbulento



Fonte: Çengel e Cimbala (2015)

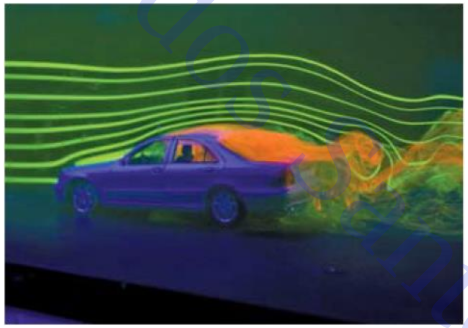
3) A figura ao lado mostra um exemplo de transição do regime laminar para o turbulento em um escoamento sobre uma placa plana. Pode-se perceber, novamente, que a tensão viscosa na parede é maior para o escoamento turbulento do que para o laminar. OBS.: como comentado anteriormente, a região próxima à parede onde há gradientes de velocidade (região em cor "rosa") é conhecida como camada limite hidrodinâmica (perceba que a sua espessura aumento no sentido do escoamento) e será vista com maiores detalhes no decorrer do curso.





Fonte: Çengel e Cimbala (2015)

4) A figura ao lado mostra a transição entre o regime laminar e turbulento em um escoamento sobre uma esfera. OBS.: quando ocorre a transição para o regime turbulento em um escoamento sobre uma esfera, há uma redução na força de arraste. Logo, as bolinhas de golfe possuem sulcos ("buracos") sobre a sua superfície para que haja a transição "mais rápida" para o regime turbulento e elas possam ser lançadas a uma maior distância (menor arraste)



Fonte: Çengel e Cimbala (2015)

5) A figura ao lado mostra o escoamento turbulento formado atrás de um carro em movimento (este experimento foi realizado no interior de um túnel de vento usando "fumaça" para observar o escoamento).

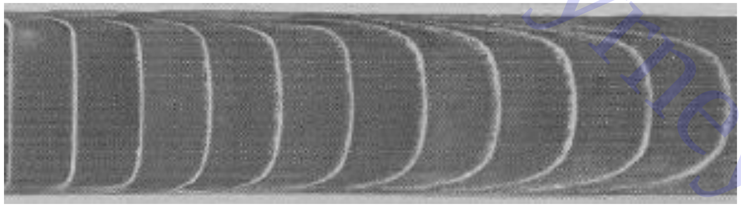
Professor Dyrney Araújo dos Santos
Universidade Federal de Goiás
Pós-Graduação em Engenharia Química
site: www.dyrney.com

2. Conceito de Fluido e Reologia

2.6 Classificação dos Escoamentos de Fluidos

Os escoamentos de fluidos podem ser classificados em:

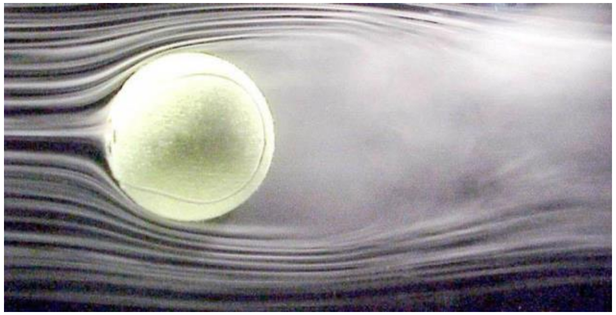
b) Escoamentos Interno e Externo



Escoamento Interno: Escoamentos completamente envoltos por superfícies sólidas. São dominados pela influência da viscosidade em todo o campo de escoamento.
Ex: escoamento no interior de tubulações. Seguem valores de referência para o número de Reynolds:

$$Re \leq 2300 \quad \text{(Laminar)}$$
$$Re > 2300 \quad \text{(Turbulento)}$$

Neste caso $L = D_T$ (diâmetro da tubulação)



Escoamento Externo: Escoamentos não confinados de um fluido sobre uma superfície Os efeitos viscosos estão restritos às camadas-limite próximas das superfícies sólidas e às regiões de esteira a jusante dos corpos.
Ex: escoamento sobre uma bola de tênis, sobre uma placa, sobre um duto, etc. Seguem valores de referência para o número de Reynolds :

Fonte: Çengel e Cimbala (2015)

$$Re \leq 5x10^5 \quad \text{(Laminar)}$$
$$Re > 5x10^5 \quad \text{(Turbulento)}$$

Neste caso $L = D_E$ (diâmetro da bola)

2. Conceito de Fluido e Reologia

2.6 Classificação dos Escoamentos de Fluidos

Os escoamentos de fluidos podem ser classificados:

c) Escoamentos Compressível e Incompressível

Escoamento Compressível: escoamentos nos quais as variações na massa específica não são desprezíveis

Escoamento Incompressível: escoamentos nos quais as variações na massa específica são desprezíveis

Número adimensional de Mach

Ernst Waldfried Josef Wenzel Mach
(1838 – 1916)
(Físico e filósofo austríaco)

$$\mathrm{Ma} = \frac{v}{c}$$

sendo: **v** e **c** a velocidade do fluido e a velocidade do som no fluido, cujo valor é de **346 m/s** no ar à temperatura ambiente e ao nível do mar, respectivamente

$Ma < 0{,}3$ (**Escoamento pode se considerado incompressível**)

$Ma > 0{,}3$ (**Escoamento compressível**)

- $Ma = 1$ **Sônico**
- $Ma < 1$ **Subsônico**
- $Ma > 1$ **Supersônico**
- $Ma >> 1$ **Hipersônico**

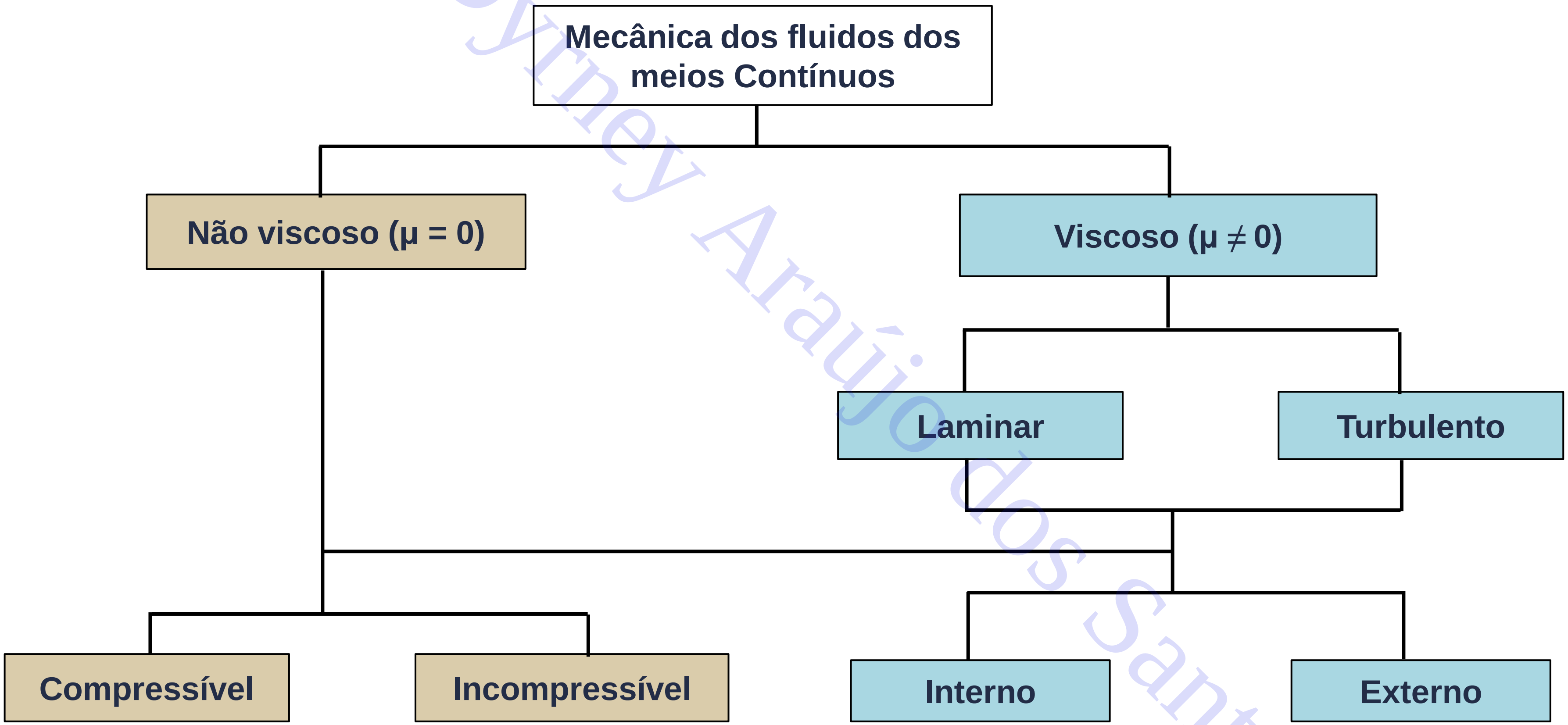
OBS.12: não confundir escoamento incompressível com fluido incompressível. O ar escoando a baixas velocidades pode apresentar baixa variação de massa específica apesar de ser considerado um fluido compressível.

Professor Dyrney Araújo dos Santos
Universidade Federal de Goiás
Pós-Graduação em Engenharia Química
site: www.dyrney.com

2. Conceito de Fluido e Reologia

2.6 Classificação dos Escoamentos de Fluidos

Possível Classificação da Mecânica dos fluidos de meios Contínuos

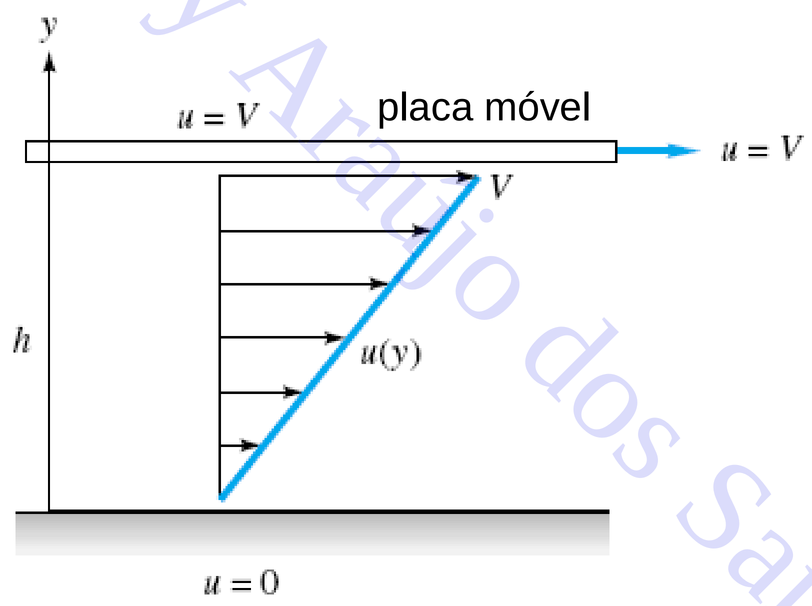


Fonte (modificado): White (2011)

Professor Dyrney Araújo dos Santos
Universidade Federal de Goiás
Pós-Graduação em Engenharia Química
site: www.dyrney.com

2. Conceito de Fluido e Reologia

Exercício proposto: Uma placa infinita move-se sobre uma segunda placa (**em repouso**), havendo entre elas uma camada de líquido (**fluido newtoniano**), como mostrado na figura abaixo. Considerando que a velocidade ***u*** varia linearmente com ***y*** no interior do fluido no espaço entre as placas (**u = ay + b, sendo a e b duas constantes**), determine a distribuição de velocidade com base nas condições de contorno (ou seja, as constantes **a** e **b**). **Determine, também, a força exercida pela placa superior sobre o fluido para que a mesma se mova com uma velocidade constante *V*.**



Bibliografia

BIRD, R.B.; STEWART, W.E. e; LIGHTFOOT, E.N. Fenômenos de transporte, 2ª ed., LTC, 2004.

ÇENGEL, Y.A e CIMBALA, J.M.; Mecânica dos fluidos, McGraw Hill, 3ª edição, 2015.

WHITE, F. M. Mecânica dos Fluidos. 6ª edição. MCGRAW-HILL, 2011.