Instituto de Química
IQ - UFG

ENGENHARIA QUÍMICA
Universidade Federal de Goiás

Estática dos Fluidos

Distribuição de pressão em um fluido

Professor Dyrney Araújo dos Santos
Universidade Federal de Goiás
Curso de Engenharia Química
Disciplina: Fenômenos de Transporte 1
site: www.dyrney.com

Professor Dyrney Araújo dos Santos
Universidade Federal de Goiás
Curso de Engenharia Química
site: www.dyrney.com

3. Estática dos Fluidos

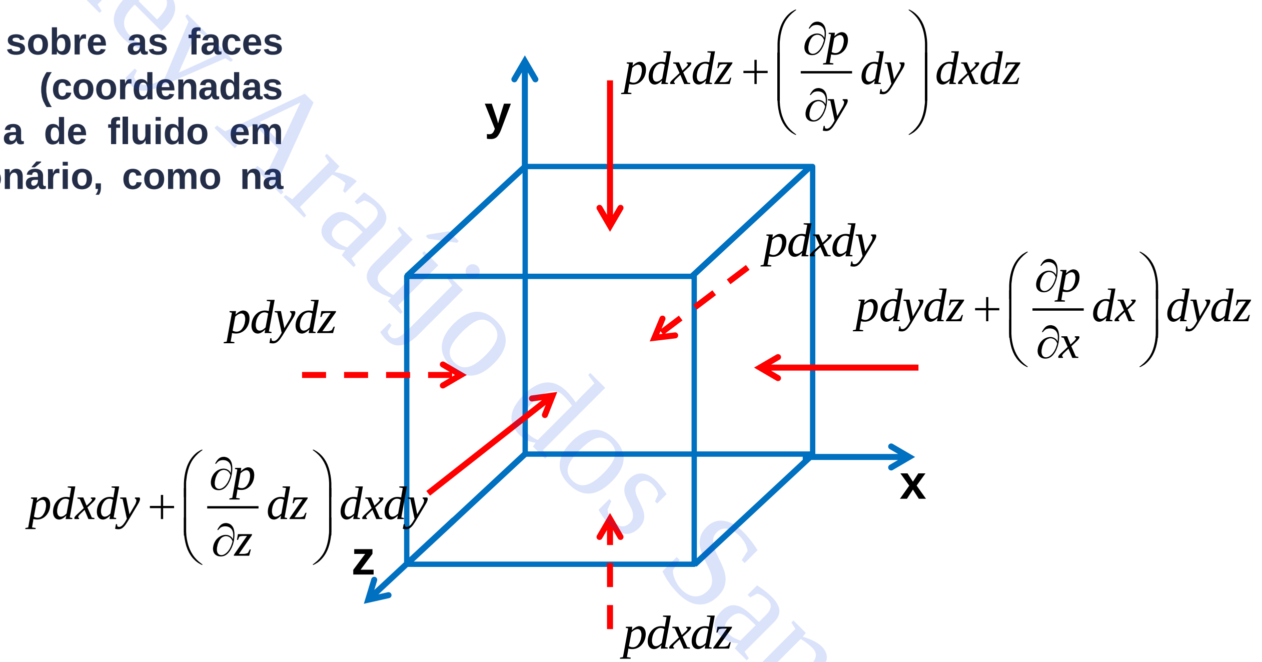
3.1 Forças que agem sobre uma partícula de fluido em repouso

As forças que agem sobre uma partícula de fluido em repouso são: <u>força de pressão</u> e <u>força gravitacional</u>, mostradas a seguir:

<u>Força de pressão:</u> a pressão é uma tensão normal que age sempre no sentido "<u>para dentro</u>" do corpo. Ela causa uma força líquida em um elemento de fluido quando ela varia espacialmente

Considere a pressão agindo sobre as faces nas direções x, y e z (coordenadas cartesianas) em uma partícula de fluido em repouso e em estado estacionário, como na figura ao lado.

$$p = p\left(x, y, z\right)$$



A força de pressão líquida na direção x sobre o elemento acima é dada por:

$$dF_x = pdydz - \left[pdydz + \left(\frac{\partial p}{\partial x}dx\right)dydz\right] \quad \textbf{ou} \quad dF_x = -\frac{\partial p}{\partial x}dxdydz$$

Professor Dyrney Araújo dos Santos
Universidade Federal de Goiás
Curso de Engenharia Química
site: www.dyrney.com

3. Estática dos Fluidos

3.1 Forças que agem sobre uma partícula de fluido em repouso

De maneira semelhante, as forças de pressão líquidas dF_y e dF_z, são dadas abaixo:

$$dF_y = -\frac{\partial p}{\partial y} dxdydz \quad \text{e} \quad dF_z = -\frac{\partial p}{\partial z} dxdydz$$

Combinando as componentes da força de pressão anteriores na forma vetorial, tem-se:

$$d\vec{F} = \left(-\frac{\partial p}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial p}{\partial y}\vec{j} - \frac{\partial p}{\partial z}\vec{k} \right) dxdydz$$

Pode-se identificar o termo entre parênteses como o <u>negativo do vetor gradiente de pressão</u>. Representando por *f* a força líquida de pressão <u>por unidade de volume do elemento</u>, teremos:

$$\boxed{d\vec{f}_{pressão} = -\nabla p}$$

OBS.1: Logo, não é a pressão, mas sim o gradiente de pressão que causa uma força líquida.

Professor Dyrney Araújo dos Santos
Universidade Federal de Goiás
Curso de Engenharia Química
site: www.dyrney.com

3. Estática dos Fluidos

3.1 Forças que agem sobre uma partícula de fluido em repouso

Força gravitacional: Considerando uma partícula de fluido em coordenadas cartesianas, a força gravitacional agindo sobre toda a sua massa pode ser representada como

$$d\vec{F}_{grav} = \rho\vec{g}dxdydz$$

ou, no caso da força gravitacional por unidade de volume do elemento, tem-se:

$$d\vec{f}_{grav} = \rho\vec{g}$$

OBS.3: Estas forças podem ser classificadas em:

- **Forças de superfície:** são aquelas forças que atuam diretamente sobre as faces do elemento, tal como a força de pressão, dentre outras tensões (normais e cisalhantes).
- **Forças de campo:** são aquelas decorrentes dos potenciais eletromagnético ou gravitacional, agindo sobre toda a massa do elemento. Aqui iremos considerar apenas a força gravitacional

Se aplicarmos, agora, a Segunda Lei de Newton a uma partícula de fluido em repouso, teremos, visto que neste caso a aceleração **a = 0**:

$$\sum\vec{F} = m\vec{a} = 0 \longrightarrow d\vec{f}_{pressão} + d\vec{f}_{grav} = 0 \longrightarrow \boxed{\nabla p = \rho\vec{g}}$$

Esta equação é conhecida como a "Equação da Estática dos Fluidos", sendo que a importância dela será demostrada a seguir

Professor Dyrney Araújo dos Santos
Universidade Federal de Goiás
Curso de Engenharia Química
site: www.dyrney.com

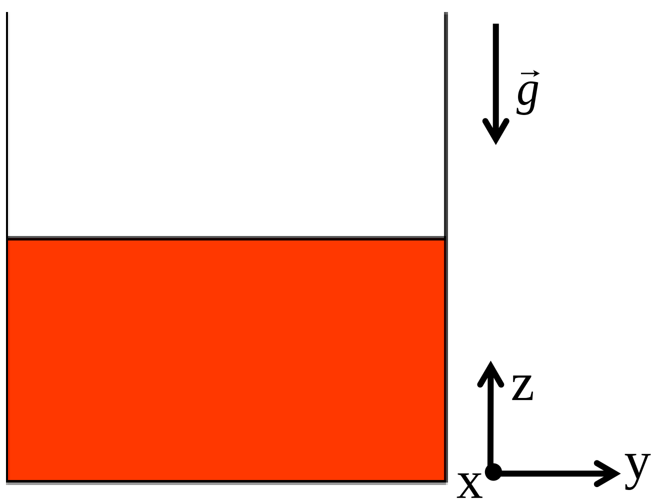
3. Estática dos Fluidos

3.1 Forças que agem sobre uma partícula de fluido em repouso

A equação anterior (sendo a mesma vetorial e diferencial) representa uma distribuição hidrostática e é correta para todos os fluidos em repouso, independente de sua reologia. Para as três direções cartesianas, tem-se:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho g_x \qquad \frac{\partial p}{\partial y} = \rho g_y \qquad \frac{\partial p}{\partial z} = \rho g_z$$

No sistema de coordenadas usual, z é "para cima" (figura abaixo). Neste caso, as componentes em x e y se anulam, sobrando apenas a componente em z. Logo.



$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

$$\boxed{\frac{dp}{dz} = -\rho g}$$

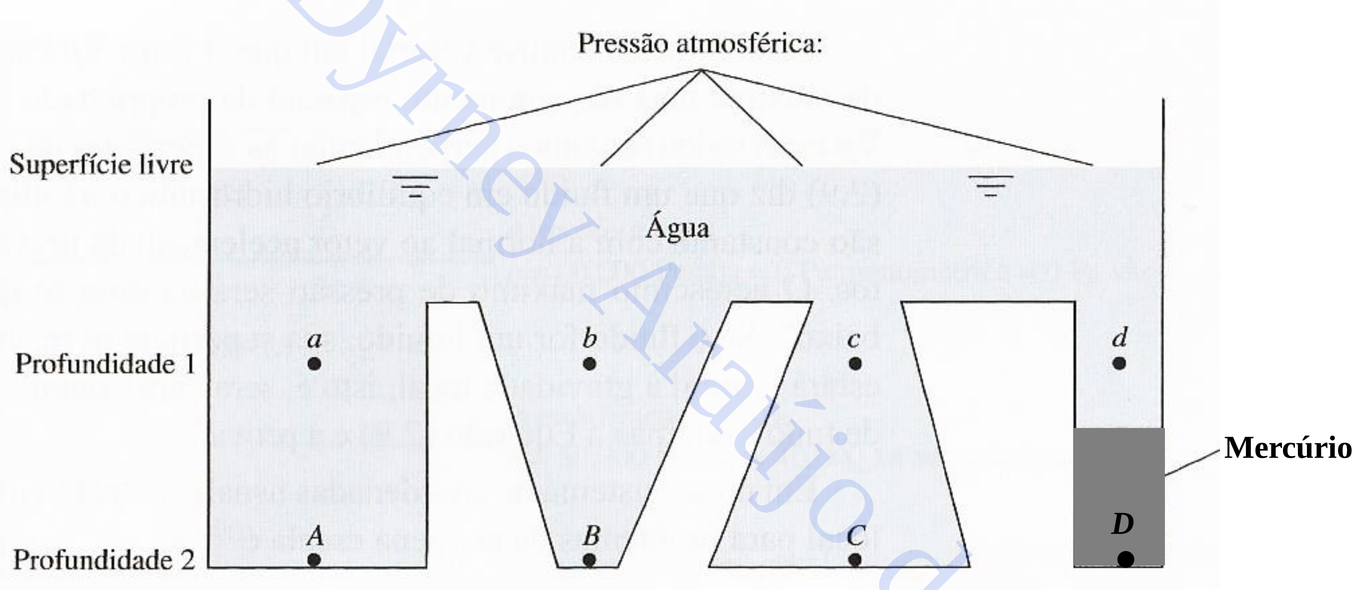
OBS.3: a pressão em um fluido estático varia somente com a distância vertical e independe da forma do recipiente. Ela é a mesma em todos os pontos em um dado plano horizontal e aumenta com a profundidade no fluido.

Professor Dyrney Araújo dos Santos
Universidade Federal de Goiás
Curso de Engenharia Química
site: www.dyrney.com

3. Estática dos Fluidos

3.1 Forças que agem sobre uma partícula de fluido em repouso

Ilustração - Vasos Comunicantes: A superfície livre do recipiente é atmosférica e forma um plano horizontal.



Fonte: White (2011)

OBS.4: As pressões nos pontos *a*, *b*, *c* e *d* são iguais, pois estão em profundidades iguais na água;

OBS.5: As pressões nos pontos *A*, *B* e *C* são iguais, pois estão em profundidades iguais na água, e maiores do que nos pontos *a*, *b*, *c* e *d*;

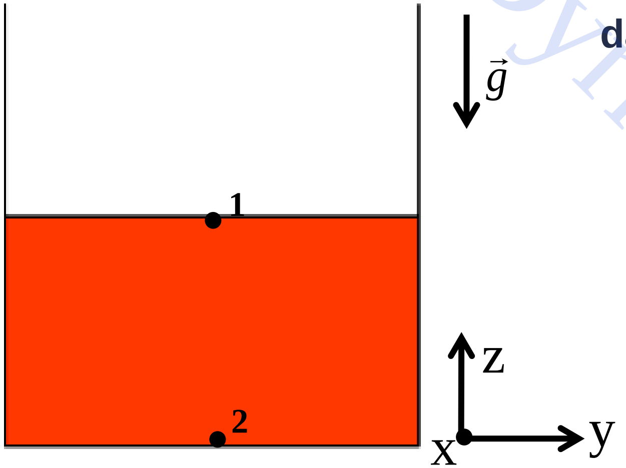
OBS.6: O ponto D tem pressão diferente de A, B e C, porque ele não está conectado aos outros por uma trajetória somente na água.

Professor Dyrney Araújo dos Santos
Universidade Federal de Goiás
Curso de Engenharia Química
site: www.dyrney.com

3. Estática dos Fluidos

3.2 Distribuição de Pressão Hidrostática

a) Pressão hidrostática nos líquidos



Integrando a equação da hidrostática entre os pontos 1 e 2 da figura ao lado, tem-se:

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g \longrightarrow \int_{p_1}^{p_2} dp = -\int_{z_1}^{z_2} \rho g dz$$

$$p_2 - p_1 = -\int_{z_1}^{z_2} \rho g dz$$

Para resolver a integração acima é necessário saber como a massa específica varia com z. Assumindo que a massa específica dos líquidos é constante nos cálculos em hidrostática, tem-se:

$$\boxed{p_2 - p_1 = -\rho g \left(z_2 - z_1\right)} \quad \textit{ou} \quad \boxed{p_2 - p_1 = -\gamma \left(z_2 - z_1\right)}$$

sendo γ o peso específico do fluido

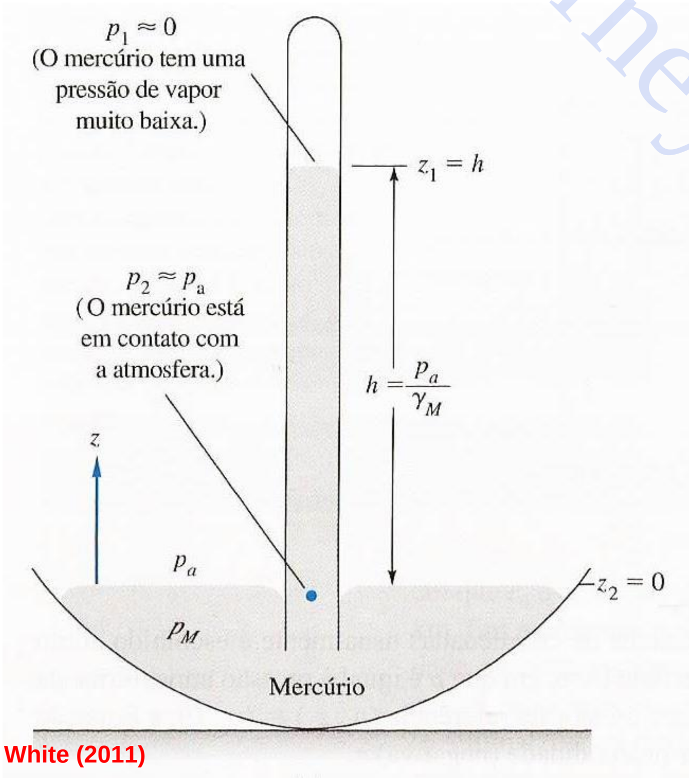
Professor Dyrney Araújo dos Santos
Universidade Federal de Goiás
Curso de Engenharia Química
site: www.dyrney.com

3. Estática dos Fluidos

3.2 Distribuição de Pressão Hidrostática

a) Pressão hidrostática nos líquidos

Barômetro de mercúrio: instrumento utilizado para a medida da pressão atmosférica, composto por um tubo cheio de mercúrio invertido quando submerso em um reservatório.



Fonte: White (2011)

Na extremidade fechada há a formação de vácuo visto que o mercúrio tem uma pressão de vapor extremamente pequena à temperatura ambiente.

Aplicando a equação anterior com $p_1 = 0$ (vácuo) em $z_1 = h$ e $p_2 \approx p_a$ (mesmo nível) em $z_2 = 0$, tem-se

$$p_a - 0 = -\rho_M g(0 - h) \longrightarrow \boxed{p_a = \rho_M g h}$$

ou

$$\boxed{h = \frac{p_a}{\gamma_M}}$$

OBS.7: Ao nível do mar, com $p_a = 1{,}014 \times 10^5$ Pa e $\gamma_M = 1{,}33 \times 10^5$ N/m³, a altura barométrica é $h = 0{,}760$ m ou 760 mm de mercúrio

Professor Dyrney Araújo dos Santos
Universidade Federal de Goiás
Curso de Engenharia Química
site: www.dyrney.com

3. Estática dos Fluidos

3.2 Distribuição de Pressão Hidrostática

b) Pressão hidrostática nos gases

No caso dos gases, a massa específica varia com a pressão e, consequentemente, com a posição z. Logo, não pode ser retirada da integral na equação da hidrostática

OBS.8: considerando que o gás se comporte como um gás ideal, tem-se:

$$pV = nRT \longrightarrow p = \frac{mRT}{VM} = \rho\frac{RT}{M} \longrightarrow \rho = \frac{pM}{RT}$$

Substituindo na equação da hidrostática e integrando, tem-se:

$$\frac{dp}{p} = -\frac{Mg}{RT}dz \longrightarrow \int_{p_1}^{p_2}\frac{dp}{p} = -\int_{z_1}^{z_2}\frac{Mg}{RT}dz$$

Considerando um sistema isotérmico, a integração produz:

$$\boxed{p_2 = p_1\exp\left[-\frac{Mg}{RT}\left(z_2 - z_1\right)\right]}$$

Professor Dyrney Araújo dos Santos
Universidade Federal de Goiás
Curso de Engenharia Química
site: www.dyrney.com

3. Estática dos Fluidos

3.3 Aplicação à Manometria

Manometria: área que estuda as técnicas de medida de pressão por meio de instrumentos denominados de manômetros.

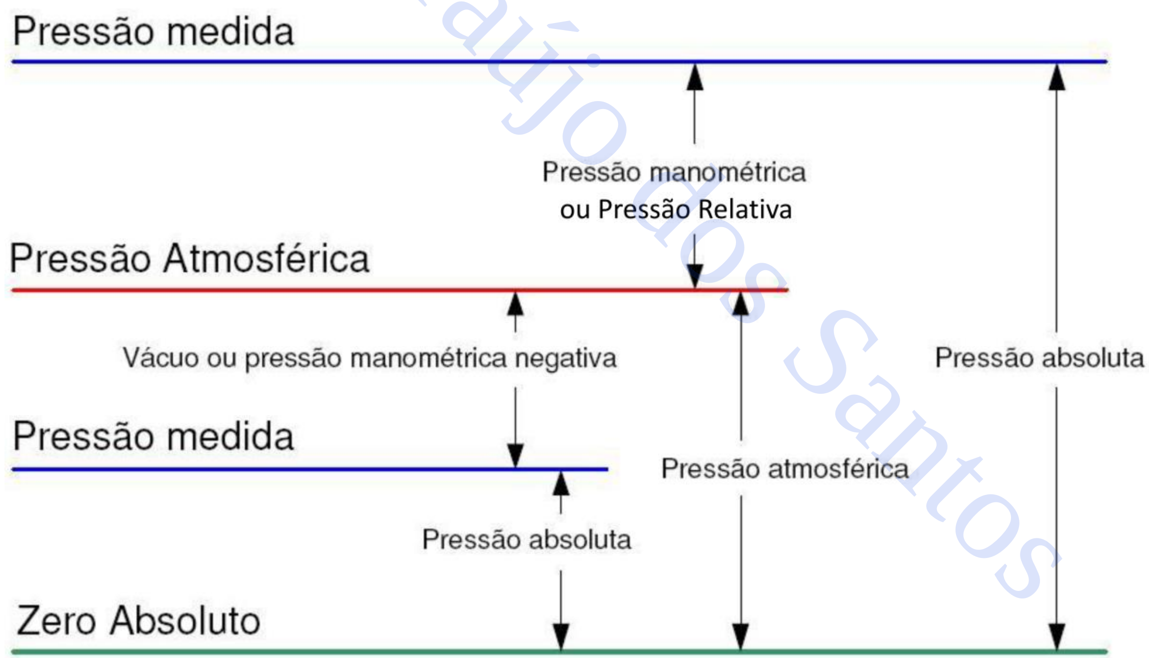
As pressões podem ser classificadas em, sendo p_{atm} a pressão atmosférica local:

a) Absoluta (p_{abs}): intensidade total (medida com relação ao vácuo absoluto)

b) Relativa: em relação à atmosfera local

$$\begin{cases} p_{man} = p_{abs} - p_{atm} \quad (p_{man} = \text{pressão manométrica}) \\ p_{vac} = p_{atm} - p_{abs} \quad (p_{vac} = \text{pressão vacuométrica}) \end{cases}$$

Ex.: leituras de pressão absoluta, manométrica e vacuométrica



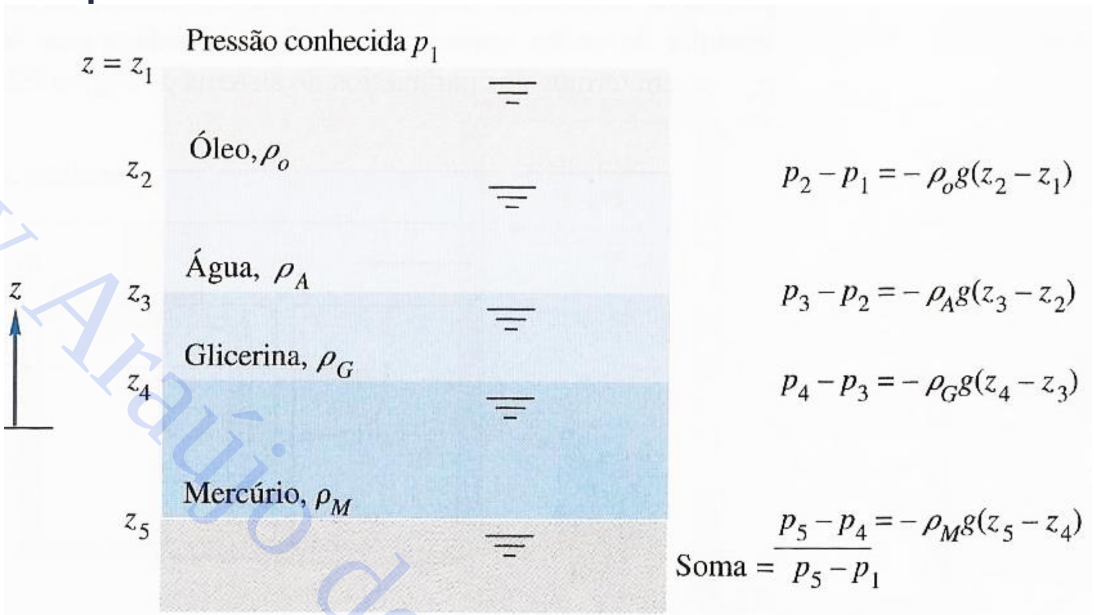
Professor Dyrney Araújo dos Santos
Universidade Federal de Goiás
Curso de Engenharia Química
site: www.dyrney.com

3. Estática dos Fluidos

3.3 Aplicação à Manometria

Aplicação: uma coluna estática de um ou mais líquidos ou gases pode ser usada para medir diferenças de pressão entre dois pontos quaisquer.

Ex: coluna de múltiplos fluidos



Fonte: White (2011)

OBS.9: a variação de pressão em cada fluido pode ser calculada separadamente ou de uma forma global, somando as contribuições de cada coluna de fluido.

OBS.10: a variação total **(p_5 - p_1)** é calculada somando-se as sucessivas variações **(p_2-p_1, p_3-p_2, p_4-p_3 e p_5-p_4)**

Logo, tem-se:

$$p_5 - p_1 = -\rho_0 g\left(z_2 - z_1\right) - \rho_A g\left(z_3 - z_2\right) - \rho_G g\left(z_4 - z_3\right) - \rho_M g\left(z_5 - z_4\right)$$

ou,

$$\boxed{p_5 = p_1 + \rho_0 g\left(z_1 - z_2\right) + \rho_A g\left(z_2 - z_3\right) + \rho_G g\left(z_3 - z_4\right) + \rho_M g\left(z_4 - z_5\right)}$$

OBS.11: Logo, a pressão na base do fluido mercúrio **($z = z_5$)** é igual à pressão na superfície em **$z = z_1$** mais o somatório das pressões devido às colunas de fluido.

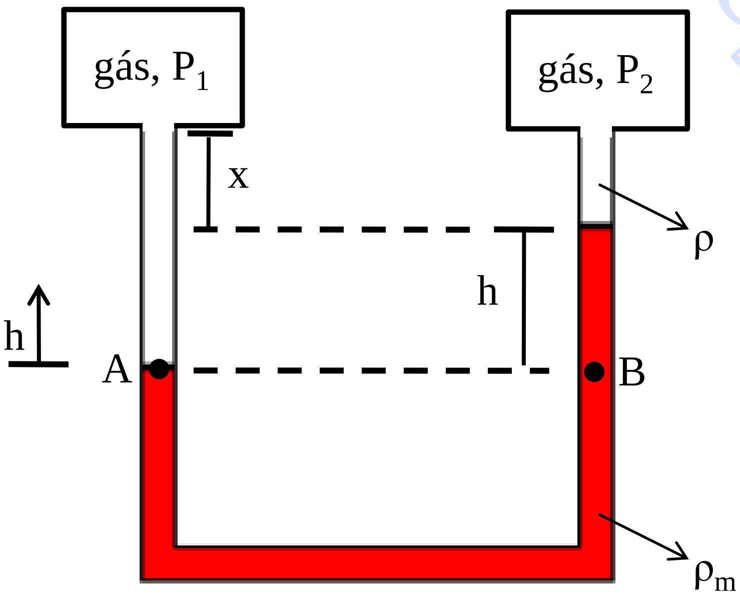
Professor Dyrney Araújo dos Santos
Universidade Federal de Goiás
Curso de Engenharia Química
site: www.dyrney.com

3. Estática dos Fluidos

3.3 Aplicação à Manometria

Há inúmeros meios para se medir uma pressão ou uma diferença de pressão de um determinado sistema. Dentre eles, os mais comuns são:

a) Manômetros do Tipo Tubo em U: consiste num tubo preenchido parcialmente por um líquido, cujas extremidades são conectadas às fontes de pressão.



Da hidrostática, tem-se:

$$p_A = p_B \quad \textbf{sendo} \quad \begin{cases} p_A = p_1 + \rho g\left(x+h\right) \\ p_B = p_2 + \rho g x + \rho_m g h \end{cases}$$

Logo,

$$p_1 + \rho g\left(x+h\right) = p_2 + \rho g x + \rho_m g h$$

$$p_1 + \cancel{\rho g x} + \rho g h = p_2 + \cancel{\rho g x} + \rho_m g h$$

$$\boxed{p_1 - p_2 = gh\left(\rho_m - \rho\right)}$$

OBS.12: o manômetro acima está medindo apenas uma diferença de pressão (<u>pressão relativa</u>). Neste caso, não é possível conhecer os valores absolutos de P_1 e P_2 mas tão somente a diferença que existe entre eles.

Professor Dyrney Araújo dos Santos
Universidade Federal de Goiás
Curso de Engenharia Química
site: www.dyrney.com

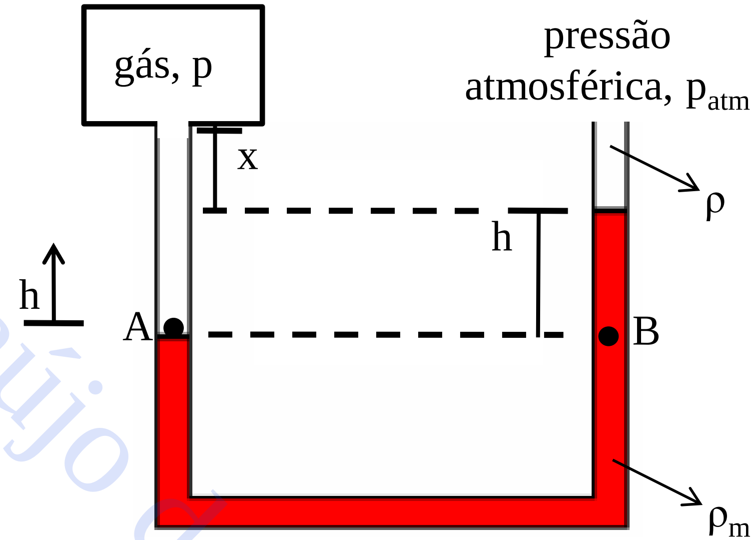
3. Estática dos Fluidos

3.3 Aplicação à Manometria

OBS.13: para se medir o valor da pressão absoluta de um reservatório de gás, o Manômetro do tipo Tubo em U deve ser instalado conforme abaixo (extremidade aberta para a atmosfera):

Logo, aplicando-se o mesmo procedimento anterior, tem-se:

$$\underset{\text{pressão absoluta}}{p} = p_{atm} + \underbrace{gh(\rho_m - \rho)}_{\text{pressão manométrica}}$$



Comentários adicionais:

1) fixando-se (p_1-p_2) ou $(p-p_{atm})$, quanto maior for $(\rho_m - \rho)$, menor será h (menor precisão na medida);

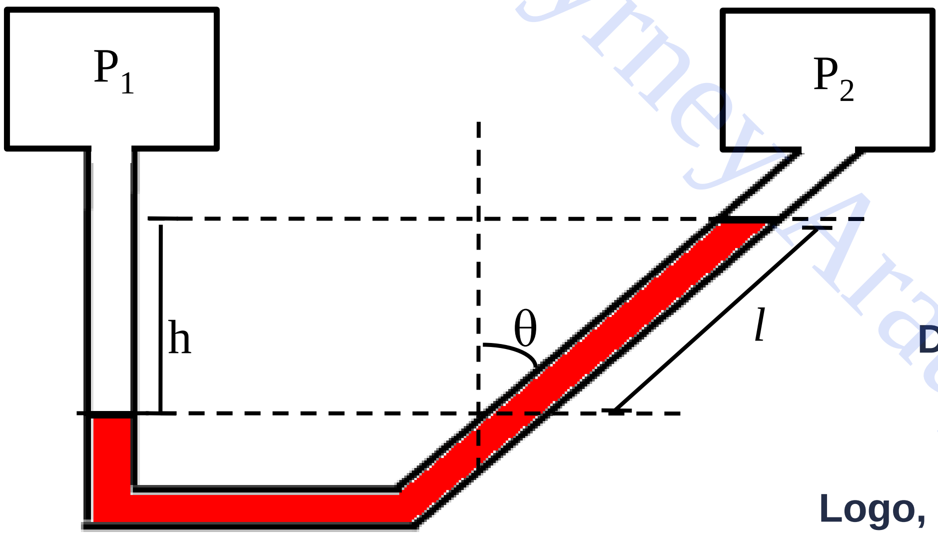
2) o fluido manométrico deve ser escolhido de forma a fornecer valores de h que favoreçam a precisão da medida;

3) para aumentar a precisão da medida, no caso de baixos valores de h, às vezes utiliza-se um Manômetro de Tubo em U Inclinado, como será mostrado a seguir.

3. Estática dos Fluidos

3.3 Aplicação à Manometria

b) Manômetros do Tipo Tubo em U Inclinado: **similar ao anterior, porém com um dos lados inclinado em um ângulo θ**



Foi mostrado que, para o manômetro em U, tem-se:

$$p_1 - p_2 = gh\left(\rho_m - \rho\right)$$

Da figura ao lado, conclui-se que

$$h = l\cos\left(\theta\right)$$

Logo, para o tubo inclinado, tem-se:

$$\boxed{p_1 - p_2 = gl\cos\left(\theta\right)\left(\rho_m - \rho\right)}$$

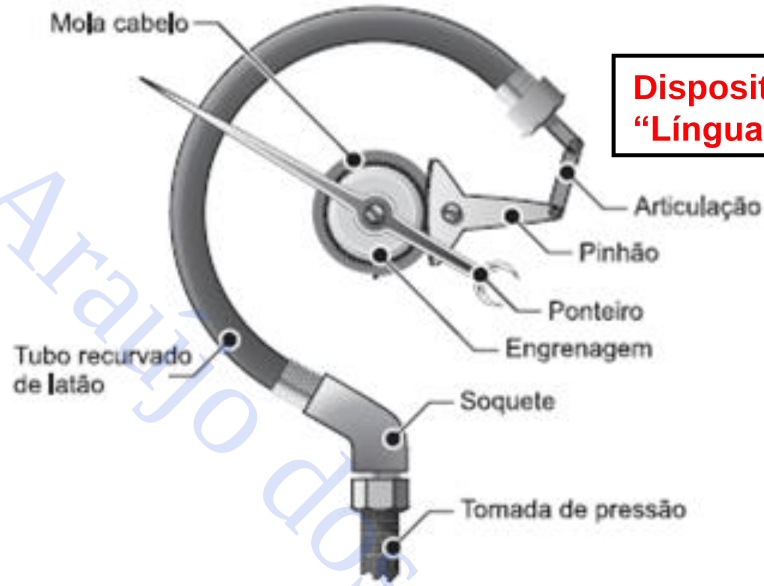
OBS.14: **conhecido o ângulo θ, obtém-se uma medida mais precisa da diferença de pressão, uma vez que o comprimento *l* é maior do que a altura h.**

Professor Dyrney Araújo dos Santos
Universidade Federal de Goiás
Curso de Engenharia Química
site: www.dyrney.com

3. Estática dos Fluidos

3.3 Aplicação à Manometria

c) Manômetro de Bourdon: analógico ou digital, são utilizados para medir a pressão relativa do sistema no qual está inserido em relação à pressão ambiente em que o envolve (pressão monométrica).



Dispositivo tipo "Língua de Sogra"

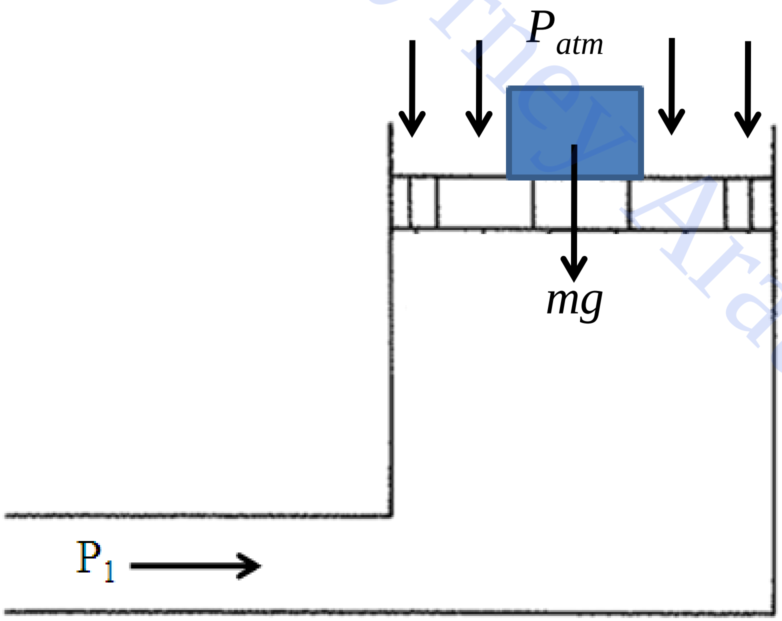
Princípio de funcionamento: Conforme há a variação da pressão a espiral abre ou fecha produzindo uma deflexão no ponteiro do mostrador proporcional à diferença entre a pressão que está sendo medida e a pressão ambiente a que o manômetro está submetido.

Professor Dyrney Araújo dos Santos
Universidade Federal de Goiás
Curso de Engenharia Química
site: www.dyrney.com

3. Estática dos Fluidos

3.4 Aplicação à Manometria

d) Manômetro de Pesos: é o instrumento usado mais frequentemente para calibrar, dentre outros, o manômetro de Bourdon.



Do balanço de forças, tem-se:

$$P_1 = P_{atm} + \frac{m_T g}{A}$$

sendo :

m_T = massa dos pesos padronizados + embolo

A = área transversal do embolo

Comentário: este dispositivo é utilizado, por exemplo, pelo *National Institute for Standards and Technology* (NIST) dos Estados Unidos.

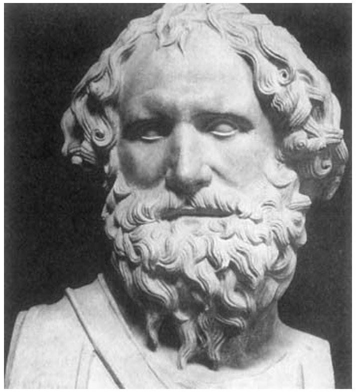
Professor Dyrney Araújo dos Santos
Universidade Federal de Goiás
Curso de Engenharia Química
site: www.dyrney.com

3. Estática dos Fluidos

3.5 Força de Empuxo

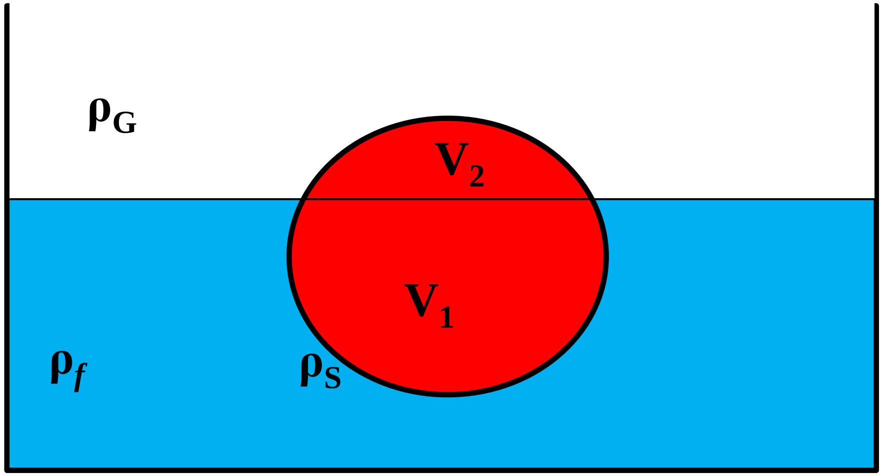
OBS.15: Os mesmos princípios usados no cálculo das forças hidrostáticas podem ser aplicados para calcular a força líquida de pressão sobre um corpo completamente submerso ou flutuante

Lei do empuxo de Arquimedes: Um corpo imerso em um fluido está sujeito a uma força de empuxo vertical igual ao peso do fluido que ele desloca



Arquimedes (287 a.C. – 212 a.C.)

Considere um determinado corpo sólido parcialmente imerso num líquido e em equilíbrio (resultante das forças que atua sobre ele é nula)



$$\vec{F}_{peso} + \vec{F}_{atmosfera} = \vec{F}_{empuxo}$$

$$\int_0^V \rho_S g dV + \int_0^{V_2} \nabla P_2 dV = \int_0^{V_1} \nabla P_1 dV$$

sendo : $V = V_1 + V_2$

Professor Dyrney Araújo dos Santos
Universidade Federal de Goiás
Curso de Engenharia Química
site: www.dyrney.com

3. Estática dos Fluidos

3.5 Força de Empuxo

Visto que: $\begin{cases} \nabla P_1 = \rho_f g \\ \nabla P_2 = \rho_G g \end{cases} \Rightarrow \int_0^V \rho_S g dV + \int_0^{V-V_1} \rho_G g dV = \int_0^{V_1} \rho_f g dV$

Logo,

$$\rho_S g V + \rho_G g \left(V - V_1\right) = \rho_f g V_1 \xrightarrow{\text{rearranjando}} \frac{V_1}{V} = \frac{\left(\rho_G + \rho_S\right)}{\left(\rho_G + \rho_f\right)}$$

Como ρ_G <<< ρ_f e ρ_G <<< ρ_S, podemos, finalmente, escrever

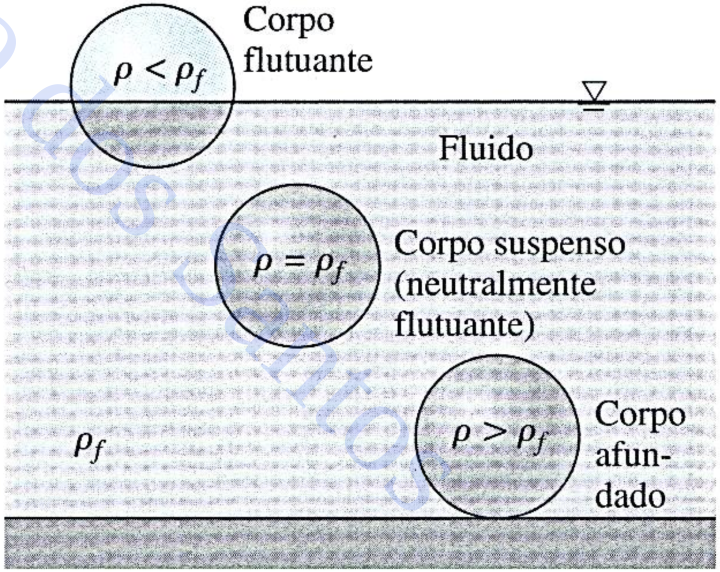
$$\boxed{\frac{V_1}{V} = \frac{\rho_S}{\rho_f}}$$

Logo, poderá ocorrer as seguintes situações:

I – Se $\rho_S < \rho_f$, o corpo ficará parcialmente submerso;

II – Se $\rho_S = \rho_f$, o corpo ficará suspenso no líquido;

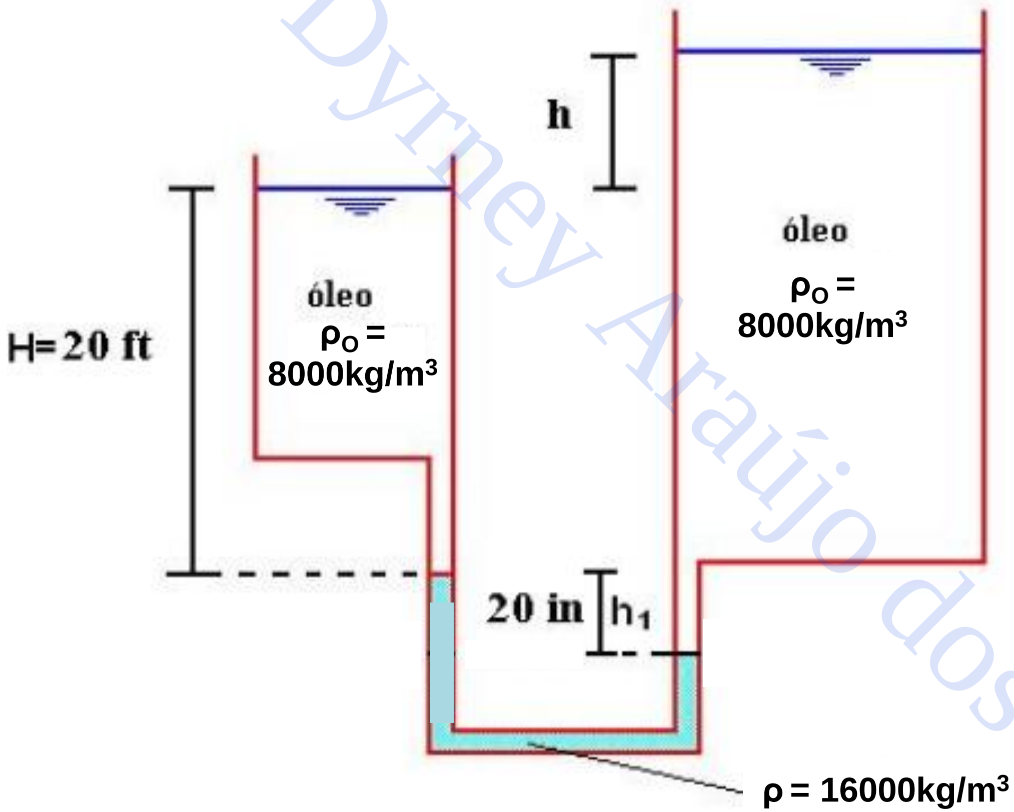
III – Se $\rho_S > \rho_f$, o corpo afundará.



Professor Dyrney Araújo dos Santos
Universidade Federal de Goiás
Curso de Engenharia Química
site: www.dyrney.com

3. Estática dos Fluidos

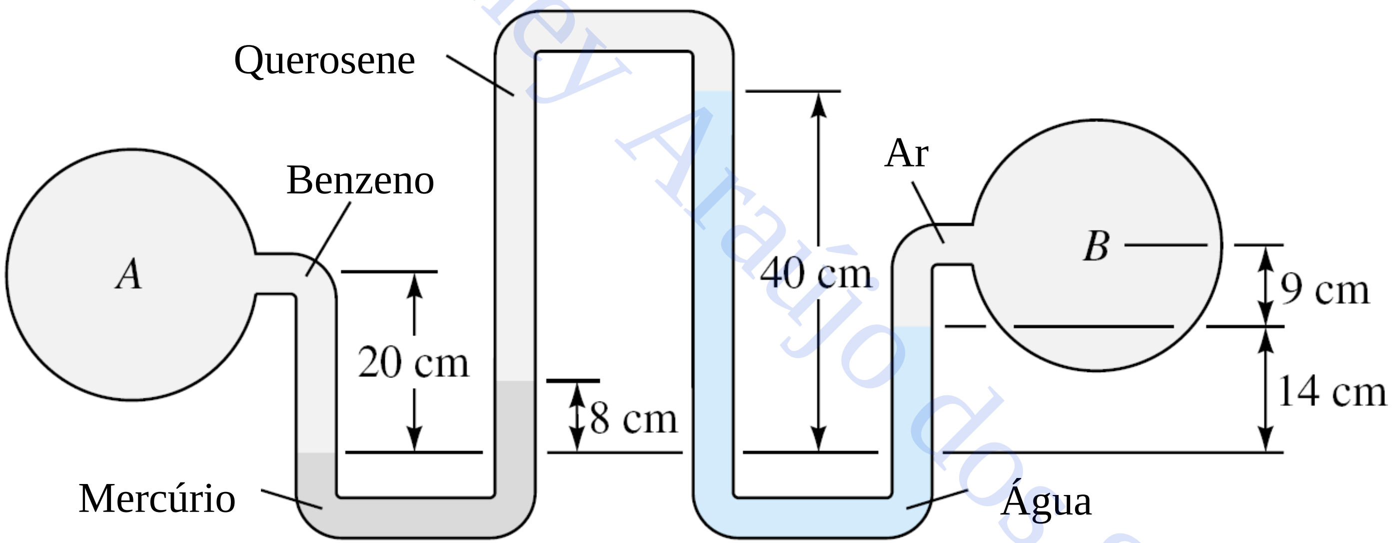
Exercício Proposto 1: Com base no sistema ilustrado abaixo, encontre o valor da altura **h**.



3. Estática dos Fluidos

Exercício Proposto 2: **Determine a diferença de pressão (Pa) entre os pontos *A* e *B*. Considere as massas específicas da água, benzeno, querosene, mercúrio e ar iguais a 979 kg/m³, 864 kg/m³, 788,5 kg/m³, 13310 kg/m³ e 1,2 kg/m³, respectivamente.**

.



Bibliografia

BIRD, R.B.; STEWART, W.E. e; LIGHTFOOT, E.N. Fenômenos de transporte, 2ª ed., LTC, 2004.

ÇENGEL, Y.A e CIMBALA, J.M.; Mecânica dos fluidos, McGraw Hill, 3ª edição, 2015.

WHITE, F. M. Mecânica dos Fluidos. 6ª edição. MCGRAW-HILL, 2011.