



Instituto de Química
IQ - UFG



ENGENHARIA QUÍMICA
Universidade Federal de Goiás

Introdução

Dimensões e Sistemas de Unidades

Professor Dyrney Araújo dos Santos
Universidade Federal de Goiás
Curso de Engenharia Química
Disciplina: Fenômenos de Transporte 1
site: www.dyrney.com

1. Introdução

1.1 Curiosidades e importância de sistemas de padronização

Mão francesa ou mão inglesa na direção?

Por que na Inglaterra (e em outros países) se dirige pela esquerda?



“Possível explicação”: como a maioria das pessoas são destras, durante a era medieval, se alguém atacasse um soldado na estrada, sua mão direita estaria livre para usar uma espada.

Alguns países que adotam este sistema: Além dos britânicos, Japão, Índia, Austrália, África do Sul, Tailândia, Guiana, Zimbábue, etc.

Por que na França (e em outros países) se dirige pela direita?



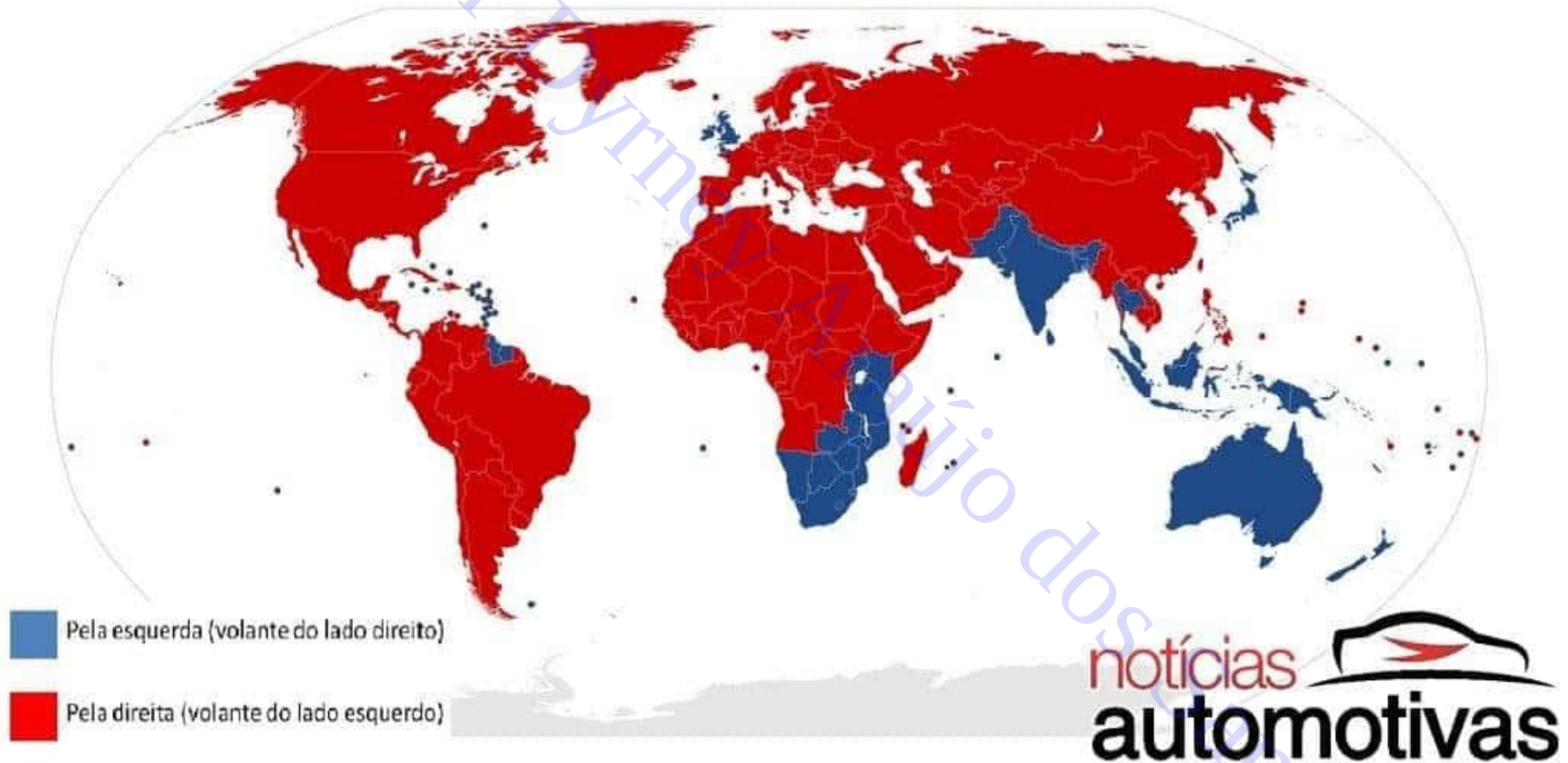
“Possível explicação”: Napoleão Bonaparte era canhoto, por isso ele precisava ficar do lado direito duma via para estar preparado num duelo, já que empunhava sua espada com a mão esquerda. Servia, também, para identificar a sua tropa à distância.

Alguns países que adotam este sistema: Além da França, EUA, Brasil, Alemanha, Rússia, etc.

1. Introdução

1.1 Curiosidades e importância de sistemas de padronização

Mão francesa ou mão inglesa na direção?



1. Introdução

1.1 Curiosidades e importância de sistemas de padronização

Como surgiu a numeração dos sapatos?

“**Ponto Inglês**”: começou com um decreto do rei Eduardo I, da Inglaterra, em 1305, que estipulou que uma polegada equivaleria a três grãos de cevada secos e alinhados. Por volta do século 17, na Inglaterra, após algumas variações na medida, os sapateiros ingleses adotaram o tamanho de um terço de polegada (**0,846 cm = 8,46 mm**), o equivalente a um grão de cevada. Durante a Revolução Industrial, as nações europeias decidiram padronizar o tamanho do grão e o transformaram em uma unidade chamada “ponto” ou “**ponto inglês**”. É adotado, hoje, no Reino Unido e em alguns territórios que foram colônias britânicas, como os EUA. Existe, também, o meio ponto (**0,423 cm = 4,23 mm**), por isto existem sapato 7,5; 8,5; etc;

“**Ponto Francês**”: surgiu em Paris no século 19 e equivale a dois terços de um centímetro (**0,66 cm = 6,6 mm**). O Brasil, dentre outros países, adota o “**ponto francês**”.

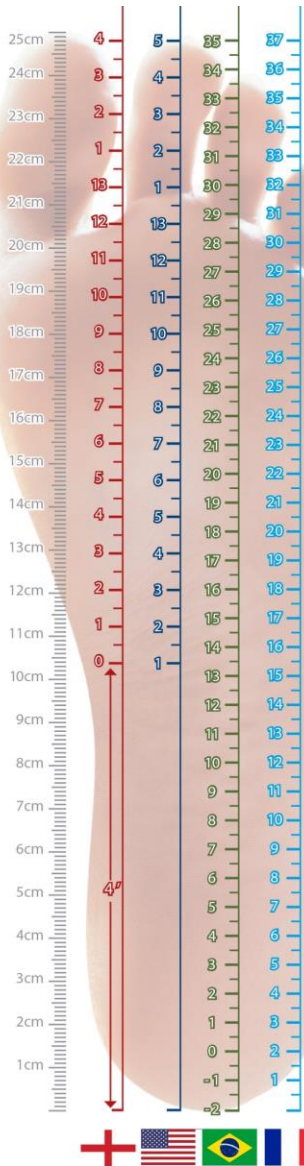
Devido à diferença na largura média dos pés dos cidadãos de cada país, o início da contagem (“**ponto 0**”) é um pouco diferente.

Ex.:

- No Brasil a contagem começa a partir do **-2**; logo, se uma pessoa calça **35** no Brasil, seu número francês será **37**;
- No Brasil, se uma pessoa calça **36**, deve pedir um sapato **5** na Inglaterra, visto que até o **13,5** o tamanho é infantil para os ingleses e a contagem recomeça no **13,5** para adultos;
- No Japão, a medida é feita como sendo um ponto para cada centímetro do pé, ou seja, se o pé tiver **20 cm**, o número do sapato será **20**.

Fonte: <https://super.abril.com.br/coluna/oraculo/o-que-significa-a-numeracao-dos-sapatos/>;

<https://super.abril.com.br/comportamento/como-se-mede-o-numero-de-sapato/#:~:text=Ele%20estipulou%20que%20uma%20polegada,38%20e%20assim%20por%20diante;>
<https://capricho.abril.com.br/moda/voce-sabe-numeracao-sapatos-significa/>



1. Introdução

1.1 Curiosidades e importância de sistemas de padronização

Confusão de padronização CUSTA CARO!!!!!!!!!!

Seguem três, dentre vários, exemplos:



Em 1628, o navio de guerra “Vesa”, considerado o mais poderoso do mundo na época, naufragou em sua viagem inaugural, a menos de dois quilômetros da costa. **Morreram, no total, 30 tripulantes.**

Causa principal do acidente: conflito no uso de sistemas de unidades!

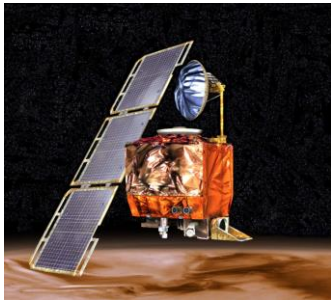
Os arqueólogos encontraram quatro réguas usadas na construção: duas estavam calibradas em pés suecos, que têm **12 polegadas**, enquanto as outras usavam pés de Amsterdã, com **11 polegadas**.



Em 23 de julho de 1983, um jato Boeing 767-200 (companhia Air Canada), ficou totalmente sem combustível à altitude de **41.000 ft (12.500 m)**, quando voava sobre o povoado de Gimli, na província canadense de Manitoba. A tripulação conseguiu pousar o avião em segurança!

Causa principal do acidente: conflito no uso de sistemas de unidades!

O Canadá havia adotado o Sistema Internacional de Unidades (S.I.) em 1970. O avião deveria ter sido abastecido com **22.300 kg (49.200 lbm)** de combustível, mas recebeu apenas **22.300 lbm (10.100 kg)**, menos da metade.



Em 23 de setembro de 1999, a comunicação com a sonda da NASA “Mars Climate Orbiter” (MCO), que tinha como objetivo o estudo do clima marciano, foi perdida. A sonda foi destruída ao tentar entrar na órbita de Marte! O custo da sonda foi em torno de **US\$ 125 milhões!**

Causa principal do acidente: conflito no uso de sistemas de unidades!

As instruções eram enviadas, da Terra para a sonda, no Sistema Inglês de Unidades, enquanto que a sonda utilizava o Sistema Internacional de Unidades (S.I.)

1. Introdução

1.2 Dimensões e Unidades

a) Dimensão: está relacionada à natureza física de uma grandeza. Ela indica o tipo de quantidade que está sendo medida, sem se preocupar com o valor numérico nem com a unidade utilizada.

Ex: o comprimento é uma dimensão associada às grandezas físicas distância, deslocamento, largura, deflexão, altura etc.

i) Dimensões Primárias: nos “fenômenos de transporte” há apenas quatro dimensões primárias das quais todas as outras podem ser derivadas

Massa (Mass) → [M]

Comprimento (Length) → [L]

Tempo (Time) → [T]

Temperatura (Temperature) → [θ]

1. Introdução

1.2 Dimensões e Unidades

ii) **Dimensões Secundárias:** são aquelas cujas existências dependem da combinação entre as Dimensões Primárias.

Ex: a força está diretamente relacionada com massa, comprimento e tempo pela segunda lei de Newton

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

Por meio desta relação vemos que, dimensionalmente: Força [ML/T²]

Outros exemplos são:

Área [L²]

Volume [L³]

Viscosidade [M/LT]

Velocidade [L/T]

Aceleração [L/T²]

Pressão [M/LT²]

Densidade [M/L³]

Energia [ML²/T²]

Tensão [M/LT²]

1. Introdução

1.2 Dimensões e Unidades

b) Unidades: é o padrão usado para expressar o valor de uma grandeza física. Cada unidade é associada a uma dimensão específica.

Ex: centímetro e polegadas são ambas unidades numéricas para expressar o comprimento.

i) O Sistema CGS: neste sistema, as unidades fundamentais são:

CGS →	{	L:	cm	(centímetro)
		M:	g	(grama)
		T:	s	(segundo)
		θ :	°C	(Celsius)

Duas unidades bastante utilizadas em mecânica dos fluidos no sistema CGS são o **poise** (homenagem a **Jean-Léonard-Marie Poiseuille**), unidade de viscosidade dinâmica, e o **stoke** (homenagem a **George Gabriel Stokes**), unidade de viscosidade cinemática



Sir George Stokes
(1819 – 1903)
(Matemático e Físico irlandês)

$$1 \text{ P (1 poise)} = 1 \text{ g/(cm.s)}$$

$$1 \text{ St (1stoke)} = 1 \text{ cm}^2/\text{s}$$

Jean-Léonard-Marie Poiseuille
(1797 – 1869)
(Médico, Físico, Matemático e Fisiólogo francês)



1. Introdução

1.2 Dimensões e Unidades

ii) O Sistema Internacional (S.I.): adotado em quase todo o planeta desde 1960 com a realização da 11ª Conferência Internacional de Pesos e Medidas (Paris, França)



PROBLEMA

Exemplo: antes, o quilo teve como referência internacional um pedaço de platina-irídio, em formato de cilindro, armazenado em Paris desde 1889, mas esse quilo original perdeu 50 microgramas em 100 anos.

SOLUÇÃO: Para resolver este problema, as definições das unidades do S.I. passaram a ser estabelecidas a partir de um conjunto de sete constantes definidoras da física. Logo, ao fixar o valor numérico exato, a unidade torna-se definida, porque o produto do valor numérico pela unidade deve ser igual ao valor da constante que foi postulada como invariante (imutável).

Exemplos das modificações no S.I. sofridas nos últimos anos

Unidade no S.I.	Até 2019	Após 2019
kelvin (Temperatura)	Definida como $1/273,16$ da temperatura termodinâmica do ponto tríplice da água, ou seja, ao ponto triplo da água correspondem 273,16 kelvin.	Sua redefinição é nos termos da constante de Boltzmann
quilograma (Massa)	Massa equivalente à do protótipo internacional do quilograma, que é um cilindro de uma liga de platina e irídio com 39 milímetros de diâmetro e 39 milímetros de altura cuja massa deve ser igual a 1 decímetro cúbico de água destilada a 4,44 °C.	Definido nos termos da constante de Planck, assegurando estabilidade de longo prazo à unidade de massa do SI.

1. Introdução

1.2 Dimensões e Unidades

ii) **O Sistema Internacional (S.I.):** adotado em quase todo o planeta desde **1960** com a realização da **11ª Conferência Internacional de Pesos e Medidas**

As sete constantes definidoras do S.I. e as sete unidades correspondentes por elas definidas

Constante definidora	Símbolo da constante	Valor numérico da constante	Unidade da constante	Unidade definida	Símbolo da unidade
Frequência da transição hiperfina do cézio (Cs)	$\Delta\nu_{\text{Cs}}$	9 192 631 770	Hz	segundo	s
Velocidade da luz no vácuo	c	299 792 458	m s ⁻¹	metro	m
Constante de Planck	h	6,626 070 15 × 10 ⁻³⁴	J s	kilograma	kg
Carga elementar	e	1,602 176 634 × 10 ⁻¹⁹	C	ampere	A
Constante de Boltzmann	k	1,380 649 × 10 ⁻²³	J K ⁻¹	kelvin	K
Constante de Avogadro	N _A	6,022 140 76 × 10 ²³	mol ⁻¹	mol	mol
Eficácia luminosa	k _{cd}	683	lm W ⁻¹	cadela	cd

1. Introdução

1.2 Dimensões e Unidades

ii) O Sistema Internacional (S.I.): adotado em quase todo o planeta desde 1960 com a realização da 11ª Conferência Internacional de Pesos e Medidas

Algumas Dimensões Primárias	Unidades no S.I.
Massa [M]	kg (quilograma)
Comprimento [L]	m (metro)
Tempo [T]	s (segundo)
Temperatura[θ]	K (Kelvin)
Algumas Dimensões secundárias	Unidades no S.I.
Força [MLT ⁻²]	kg.m/s ² = N (Newton)
Pressão ou tensão [ML ⁻¹ T ⁻²]	N/m ² = kg/(m.s ²) = Pa (Pascal)
Energia, calor, trabalho [ML ² T ⁻²]	N.m = kg.m ² /s ² = J (Joule)
Potência [ML ² T ⁻³]	J/s = kg.m ² /s ³ = W (Watts)
Viscosidade [ML ⁻¹ T ⁻¹]	kg/(m.s) = Pa.s
Aceleração [LT ⁻²]	m/s ²
Velocidade [LT ⁻¹]	m/s

1. Introdução

1.2 Dimensões e Unidades

iii) O Sistema Inglês de Engenharia (FPS): No FPS (feet-poundal-second), a massa, o tempo, o comprimento e a temperatura são dados por

FPS (Dimensões Fundamentais)	→	Comprimento [L]	→	ft	(pé)
		Massa [M]:	→	lb _m	(libra-massa)
		Tempo [T]:	→	s	(segundo)
		Temperatura [θ]:	→	°F	(graus Fahrenheit)

Neste caso, a lei de newton deve ser reescrita como:

$$F = \frac{ma}{g_c}, \quad \text{em que} \quad g_c = 32,174 \frac{\text{ft} \cdot \text{lb}_m}{\text{lbf} \cdot \text{s}^2}$$

A constante de proporcionalidade, g_c , tem dimensões e um valor numérico diferente de 1 quando se usa o Sistema Inglês de Engenharia. Para o Sistema Internacional, por exemplo, g_c é igual a 1.

1. Introdução

1.2 Dimensões e Unidades

iv) O Sistema Britânico Gravitacional (BG): No sistema BG algumas unidades são: **libra-força [F], pés [L], segundos [T], slugs [M] e grau Rankine [θ]**.

Algumas relações entre as dimensões primárias e secundárias nos S.I. e BG

Dimensões	Unidades no SI	Unidades no BG	Fator de conversão
Massa	kg	slug = lbf.s ² /ft	1 slug = 14,594 kg
Comprimento	m	ft	1 ft = 0,3048 m
Tempo	s	s	1 s = 1 s
Temperatura	K	°R	1 K = 1,8°R
Velocidade	m/s	ft/s	1 ft/s = 0,3048 m/s
Pressão ou tensão	Pa	lbf/ft ²	1 lbf/ft ² = 47,88 Pa
Potência	W	ft.lbf/s	1 ft.lbf/s = 1,3558 W
Viscosidade	kg/(m.s)	slugs/(ft.s)	1 slugs/(ft.s) = 47,88 kg/(m.s)

Não se tratando do sistema S.I., é comum a energia ser dada em termos de **Btu (British Thermal Unit)** e a potência em **hp (horse power)**.

$$1 \text{ hp} = 745,7 \text{ W}$$

$$1 \text{ BTU} = 1055 \text{ J}$$

1. Introdução

1.2 Dimensões e Unidades

iv) O Sistema Britânico Gravitacional (BG): No sistema BG as unidades básicas são: libra-força [F], pés [L], segundos [T], *slugs* [M] e grau Rankine [θ].

Comentários adicionais:

- 1) No sistema BG é, também comum, expressar a pressão em **lbf/in²** ou **psi** (“*pounds per square inches*”);
- 2) No caso de pressão absoluta (conceito que será estudado posteriormente), é utilizado o termo **psia** (o “a” vem de “*absolute*”, que em português é “*absoluto*”; logo, em inglês seria “*absolute pressure*”);
- 3) Já para a pressão relativa ou manométrica (conceito que será estudado posteriormente), utiliza-se o termo **psig** (o “g” vem de “*gauge*”, que em português pode significar “*manométrica*” ou “*relativa*”; logo, em inglês seria “*gauge pressure*”)

Relação entre as principais unidades de pressão

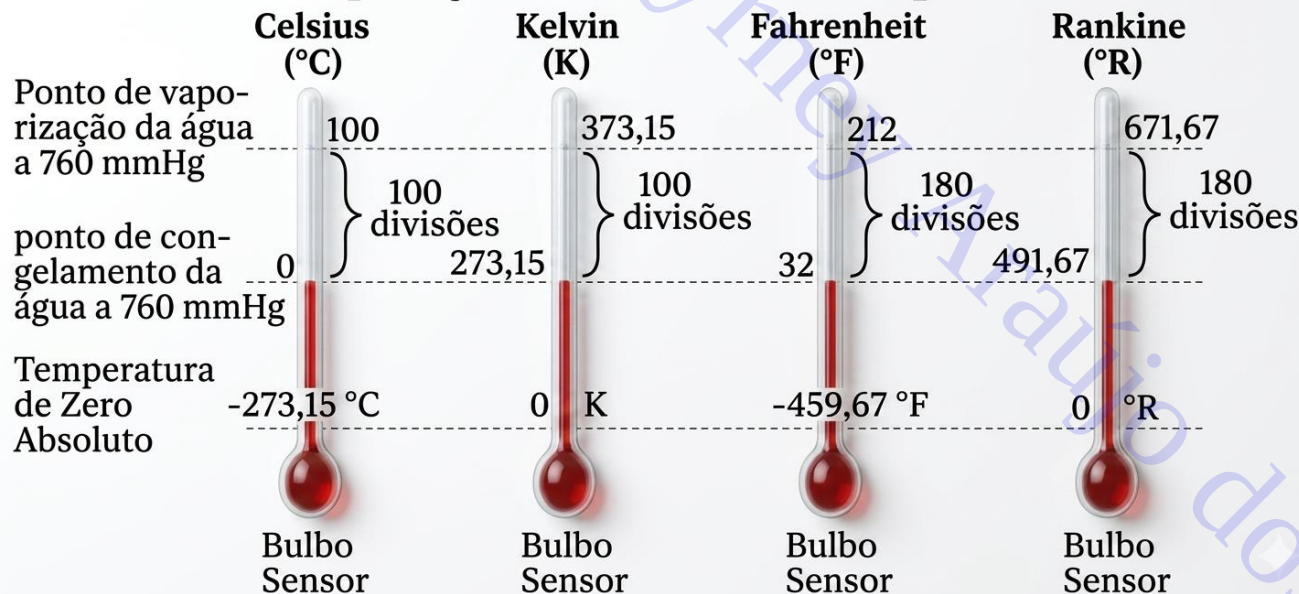
$$1 \text{ atm} = 101325 \text{ Pa} = 14,69595 \text{ psi} = 1,01325 \text{ bar} = 760 \text{ mmHg} = \\ 10,34 \text{ mca} = 1013250 \text{ dyn/cm}^2 = 1,0339 \text{ kgf/cm}^2$$

1. Introdução

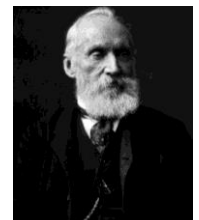
1.2 Dimensões e Unidades

Variações nas escalas de temperatura: as escalas Celsius (T_C) e Kelvin (T_K) possuem a mesma variação de temperatura (possuem 100 intervalos de divisão), diferente das escalas Fahrenheit (T_F) e Rankine (T_R) (possuem 180 intervalos de divisão) que, por sua vez, possuem a mesma variação entre si.

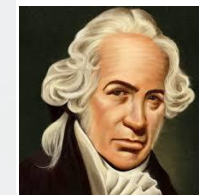
Comparação de Escalas de Temperatura



Anders Celsius
(1701 – 1744)
(Astrônomo, físico e geofísico sueco)



William Thomson
(Lorde Kelvin)
(1824 – 1907)
(Físico e engenheiro irlandês)



Daniel Gabriel Fahrenheit
(1686 – 1736)
(Físico e engenheiro alemão)



William John Macquorn Rankine
(1820 – 1872)
(Polímata escocês)

Relação entre as principais unidades de temperatura

$$T_F = \frac{9}{5}T_C + 32; \quad T_C = \frac{5}{9}(T_F - 32); \quad T_R = T_F + 459,69; \quad T_K = T_C + 273,15$$

1. Introdução

1.2 Dimensões e Unidades

c) Princípio da Homogeneidade Dimensional: na engenharia e na ciência, todas as equações devem ser dimensionalmente homogêneas, isto é, cada termo aditivo/subtrativo/igualado em uma equação tem de ter as mesmas dimensões.

Nos exemplos abaixo, considere **m**, **v**, **g**, **ρ**, **z**, **ΔP** e **C** como sendo a massa, a velocidade, a aceleração da gravidade, a massa específica, a distância na vertical, a diferença de pressão e uma constante, respectivamente.

Exemplo 1: Energia Cinética = $\frac{mv^2}{2}$

$$[ML^2/T^2] = [ML^2/T^2]$$

Exemplo 2: $\frac{v^2}{2} + \frac{\Delta P}{\rho} + gz = C$

$$[L^2/T^2] + [L^2/T^2] + [L^2/T^2] = [L^2/T^2]$$

Observe que que somente se iguala ou se soma (ou subtrai) grandezas físicas que possuem as mesmas dimensões. Sempre faça uma análise dimensional antes de usar qualquer equação física.

1. Introdução

1.2 Dimensões e Unidades

d) Prefixos convenientes para unidades de Engenharia: advém da necessidade e dificuldade de representar graficamente números muito pequenos ou muito grandes.

Fator multiplicativo	Prefixo	Símbolo
10^{12}	tera	T
10^9	giga	G
10^6	mega	M
10^3	quilo	k
10^2	hecto	h
10	deca	da
10^{-1}	deci	d
10^{-2}	centi	c
10^{-3}	mili	m
10^{-6}	micro	μ
10^{-9}	nano	n
10^{-12}	pico	p

Exemplos:

$P = 114000000 \text{ Pa} = 114 \text{ MPa}$ (mega-pascal)

$t = 0,000000003 \text{ s} = 3 \text{ ns}$ (nanossegundos)

1. Introdução

Exercício Proposto 1: A água a **20°C** tem uma viscosidade dinâmica **$\mu = 1\text{cp}$** (centipoise). Expresse esses resultados nos seguintes sistemas de unidades:

a) S.I.

b) BG

Exercício Proposto 2: Considere a equação abaixo que descreve o escoamento de um fluido através de um orifício

$$v = C \sqrt{\frac{\Delta P}{\rho}}$$

em que, **v** é a velocidade do fluido, **ΔP** é uma diferença de pressão (queda de pressão), **ρ** é a densidade do fluido e **C** é uma constante. Determinar a unidade da constante **C** de acordo com o Sistema Internacional (S.I.)



Instituto de Química
IQ - UFG



ENGENHARIA QUÍMICA
Universidade Federal de Goiás

Introdução

Álgebra Tensorial

Professor Dyrney Araújo dos Santos
Universidade Federal de Goiás
Curso de Engenharia Química
Disciplina: Fenômenos de Transporte 1
site: www.dyrney.com

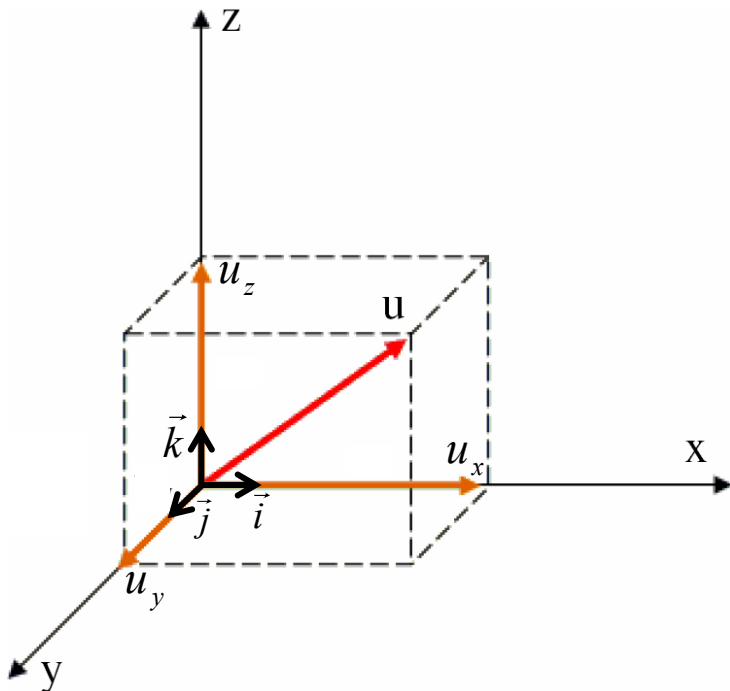
1. Introdução

1.3 Álgebra Tensorial

a) Grandeza Escalar: requer apenas um valor numérico para ser totalmente caracterizada.

Ex: massa, comprimento, área, volume, densidade, viscosidade, condutividade térmica, calor específico, temperatura, etc.

b) Grandeza Vetorial: requer, além do valor numérico (módulo), uma direção e um sentido. **Ex:** velocidade, aceleração, força, etc.



representação de um vetor “ $\vec{u}$ ”
qualquer em coordenadas
retangulares ou cartesianas

$$\vec{u} = u_x \vec{i} + u_y \vec{j} + u_z \vec{k}$$

Nota-se que u_x , u_y e u_z são escalares (fornece o módulo em cada direção). Logo, suas somas necessitam da multiplicação por vetores unitários $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$ (fornece a direção e o sentido sem modificar o módulo ou valor numérico).



René Descartes
(1596 – 1650)
(Filósofo, físico e
matemático francês)

1. Introdução

1.3 Álgebra Tensorial

Principais Operações Envolvendo Vetores

i) Adição de Vetores: o resultado da soma ou subtração entre vetores é um vetor.

Ex: sejam dois vetores quaisquer, $\vec{u}$ e $\vec{v}$, logo,

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_x \vec{i} + u_y \vec{j} + u_z \vec{k}) + (v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k})$$

$$= (u_x + v_x) \vec{i} + (u_y + v_y) \vec{j} + (u_z + v_z) \vec{k} \longrightarrow \text{Vetor}$$

ii) Multiplicação de um Vetor por um Escalar: o resultado da multiplicação de um vetor ($\vec{u}$) por um escalar (α) é um vetor.

$$\alpha \vec{u} = \alpha (u_x \vec{i} + u_y \vec{j} + u_z \vec{k})$$

$$= \alpha u_x \vec{i} + \alpha u_y \vec{j} + \alpha u_z \vec{k} \longrightarrow \text{Vetor}$$

1. Introdução

1.3 Álgebra Tensorial

iii) **Produto Escalar entre Vetores:** o resultado do produto escalar entre dois vetores, representado por “.”, é um escalar. Não existe produto escalar entre escalares e nem entre um escalar e um vetor!

Ex: sejam dois vetores quaisquer, $\vec{u}$ e $\vec{v}$, logo,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (u_x \vec{i} + u_y \vec{j} + u_z \vec{k}) \cdot (v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k})$$

Aplicando a propriedade distributiva, tem-se:

$$= u_x v_x (\vec{i} \cdot \vec{i}) + u_x v_y (\vec{i} \cdot \vec{j}) + u_x v_z (\vec{i} \cdot \vec{k}) + \dots + u_z v_z (\vec{k} \cdot \vec{k})$$

Por definição, o produto escalar entre dois vetores ortogonais unitários “a” e “b” quaisquer é dado por, sendo θ o ângulo formado entre os dois vetores:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\theta) \quad \text{se} \quad \begin{cases} \vec{a} = \vec{b}, & \cos(0) = 1 \text{ e } \vec{a} \cdot \vec{b} = 1.1.1 = 1 \\ \vec{a} \neq \vec{b}, & \cos(90) = 0 \text{ e } \vec{a} \cdot \vec{b} = 1.1.0 = 0 \end{cases}$$

Logo, retornando à equação anterior, tem-se:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z \longrightarrow \text{Escalar}$$

1. Introdução

1.3 Álgebra Tensorial

iv) Produto Vetorial entre Vetores: o resultado do produto vetorial entre dois vetores, representado por “ $\times$ ”, é um vetor normal ao plano definido pelos vetores. Não existe produto vetorial entre escalares e nem entre um escalar e um vetor!

Ex: sejam dois vetores quaisquer, $\vec{u}$ e $\vec{v}$, logo,

$$\vec{u} \times \vec{v} = (u_x \vec{i} + u_y \vec{j} + u_z \vec{k}) \times (v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k})$$

Aplicando a propriedade distributiva, tem-se:

$$= u_x v_x (\vec{i} \times \vec{i}) + u_x v_y (\vec{i} \times \vec{j}) + u_x v_z (\vec{i} \times \vec{k}) + \dots + u_z v_z (\vec{k} \times \vec{k})$$

Por definição, o produto vetorial entre dois vetores ortogonais unitários “ $\mathbf{a}$ ” e “ $\mathbf{b}$ ” quaisquer é dado por, sendo θ o ângulo formado entre os dois vetores e “ $\mathbf{n}$ ” o vetor unitário perpendicular, tanto ao vetor “ $\mathbf{a}$ ”, quanto ao vetor “ $\mathbf{b}$ ” :

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{n} |\vec{a}| |\vec{b}| \sin(\theta)$$

Nota-se que $\sin(\theta)$ será **+1**, **0** e **-1** quando o ângulo entre “ $\mathbf{a}$ ” e “ $\mathbf{b}$ ” for **90°**, **0** e **-90°**, respectivamente. Usa-se a “**Regra da Mão Direita**” para se determinar o sentido do novo vetor.

1. Introdução

1.3 Álgebra Tensorial

iv) Produto Vetorial entre Vetores: o resultado do produto vetorial entre dois vetores, representado por “ $\times$ ”, é um vetor normal ao plano definido pelos vetores. Não existe produto vetorial entre escalares e nem entre um escalar e um vetor!

Desta forma, tem-se:

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0$$

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$$

$$\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}$$

$$\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$$

$$\vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}$$

$$\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$$

$$\vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}$$

Logo, retornando à equação anterior, tem-se:

$$\vec{u} \times \vec{v} = (u_y v_z - u_z v_y) \vec{i} + (u_z v_x - u_x v_z) \vec{j} + (u_x v_y - u_y v_x) \vec{k}$$

O mesmo resultado acima pode ser obtido pela resolução do seguinte determinante de matriz

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

1. Introdução

1.3 Álgebra Tensorial

v) Produto Triplo entre Vetores: o resultado do produto triplo entre vetores é um escalar.

Ex: sejam três vetores quaisquer, $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$, logo,

Verifique abaixo a importância em se saber o resultado da operação (**ex.:** se resultará em escalar, vetor, etc.) para que se saiba por onde começar a operação (**pelo “.” ou “x”?**)

$$\vec{u} \cdot \vec{v} \times \vec{w} = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = (u_x \vec{i} + u_y \vec{j} + u_z \vec{k}) \cdot \left[(v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}) \times (w_x \vec{i} + w_y \vec{j} + w_z \vec{k}) \right]$$

Aplicando a propriedade distributiva e as propriedades do produto escalar e vetorial, feitas anteriormente, tem-se, após rearranjo:

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = u_y v_z w_x + u_z v_x w_y + u_x v_y w_z - u_z v_y w_x - u_y v_x w_z - u_x v_z w_y$$

O mesmo resultado acima pode ser obtido pela resolução do seguinte determinante de matriz

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix}$$

1. Introdução

1.3 Álgebra Tensorial

c) **Grandeza Tensorial**: um tensor, ao contrário de um vetor, possui **9 componentes**, originadas das interações de uma força (**3 componentes**) sobre uma superfície (**3 possibilidades de ação**). Logo, um tensor possui **3 componentes** em cada direção espacial.

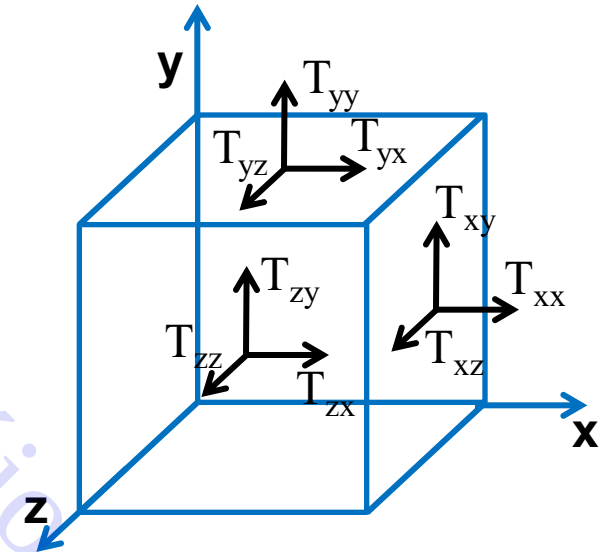
$$T = \frac{F}{A}$$

Possui unidades no S.I.
em N/m² ou Pa

Representação geral do tensor T_{ij}

i = direção normal à aplicação da força

j = direção da força



Existem dois tipos básicos de tensões que agem sobre uma superfície:

Tensões normais: agem perpendicularmente à face do cubo (T_{ii} ou T_{jj})

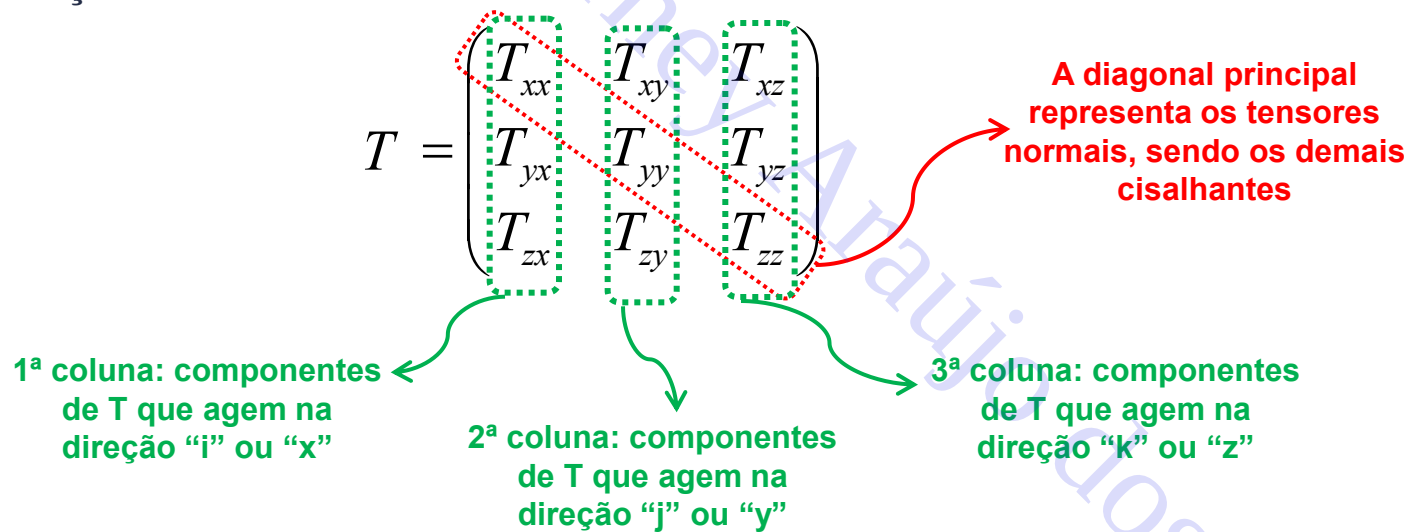
Tensões de cisalhamento: agem tangencialmente à face do cubo (T_{ij}).

1. Introdução

1.3 Álgebra Tensorial

c) Grandeza Tensorial: um tensor, ao contrário de um vetor, possui **9 componentes**, originadas das interações de uma força (**3 componentes**) sobre uma superfície (**3 possibilidades de ação**). Logo, um tensor possui **3 componentes** em cada uma das **três** direções espaciais.

As componentes de um tensor podem ser melhor representadas na forma matricial (**matriz 3×3**), sendo “**i**” relacionado às linhas e “**j**” às colunas. Este formato matricial facilita nas seguintes identificações:



Visto que cada coluna representa as componentes do tensor que agem em uma determinada direção, em termos das direções **i**, **j** e **k**, **T** pode ser representado como:

$$T = (T_{xx}, T_{yx}, T_{zx}) \vec{i} + (T_{xy}, T_{yy}, T_{zy}) \vec{j} + (T_{xz}, T_{yz}, T_{zz}) \vec{k}$$

1. Introdução

1.3 Álgebra Tensorial

Exemplos de Operações Envolvendo Tensores

i) Soma de Tensores: o resultado da soma entre tensores é um tensor.

Ex: sejam dois tensores quaisquer, T e S , logo:

$$T + S = \begin{pmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} S_{xx} & S_{xy} & S_{xz} \\ S_{yx} & S_{yy} & S_{yz} \\ S_{zx} & S_{zy} & S_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{xx} + S_{xx} & T_{xy} + S_{xy} & T_{xz} + S_{xz} \\ T_{yx} + S_{yx} & T_{yy} + S_{yy} & T_{yz} + S_{yz} \\ T_{zx} + S_{zx} & T_{zy} + S_{zy} & T_{zz} + S_{zz} \end{pmatrix}$$

Ou, de outra forma

$$\begin{aligned} T + S = & \left[(T_{xx} + S_{xx}), (T_{yx} + S_{yx}), (T_{zx} + S_{zx}) \right] \vec{i} + \\ & + \left[(T_{xy} + S_{xy}), (T_{yy} + S_{yy}), (T_{zy} + S_{zy}) \right] \vec{j} + \\ & + \left[(T_{xz} + S_{xz}), (T_{yz} + S_{yz}), (T_{zz} + S_{zz}) \right] \vec{k} \end{aligned}$$

1. Introdução

1.3 Álgebra Tensorial

ii) Produto escalar entre um Vetor e um Tensor: o resultado do produto escalar entre um vetor e um tensor é um vetor.

Ex: seja um vetor $\vec{u}$ e um tensor T , logo:

$$\vec{u} \cdot T = \left(u_x \vec{i} + u_y \vec{j} + u_z \vec{k} \right) \cdot \begin{pmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{pmatrix}$$

Ou, de outra forma

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot T &= \left(u_x T_{xx} + u_y T_{yx} + u_z T_{zx} \right) \vec{i} + \\ &+ \left(u_x T_{xy} + u_y T_{yy} + u_z T_{zy} \right) \vec{j} + \\ &+ \left(u_x T_{xz} + u_y T_{yz} + u_z T_{zz} \right) \vec{k} \end{aligned}$$

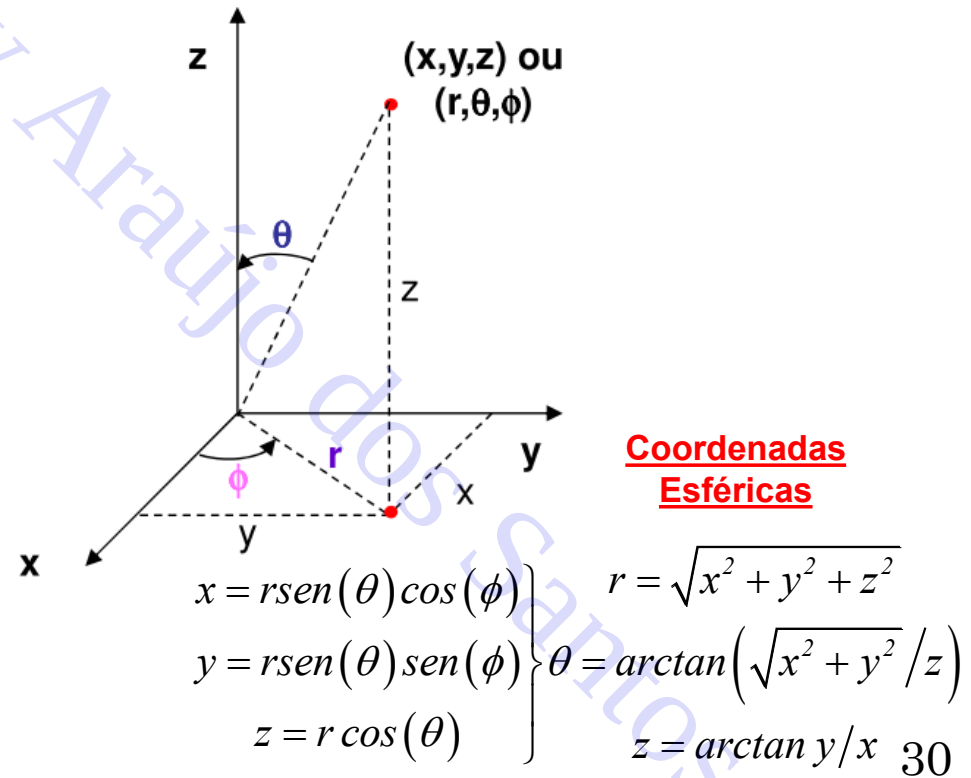
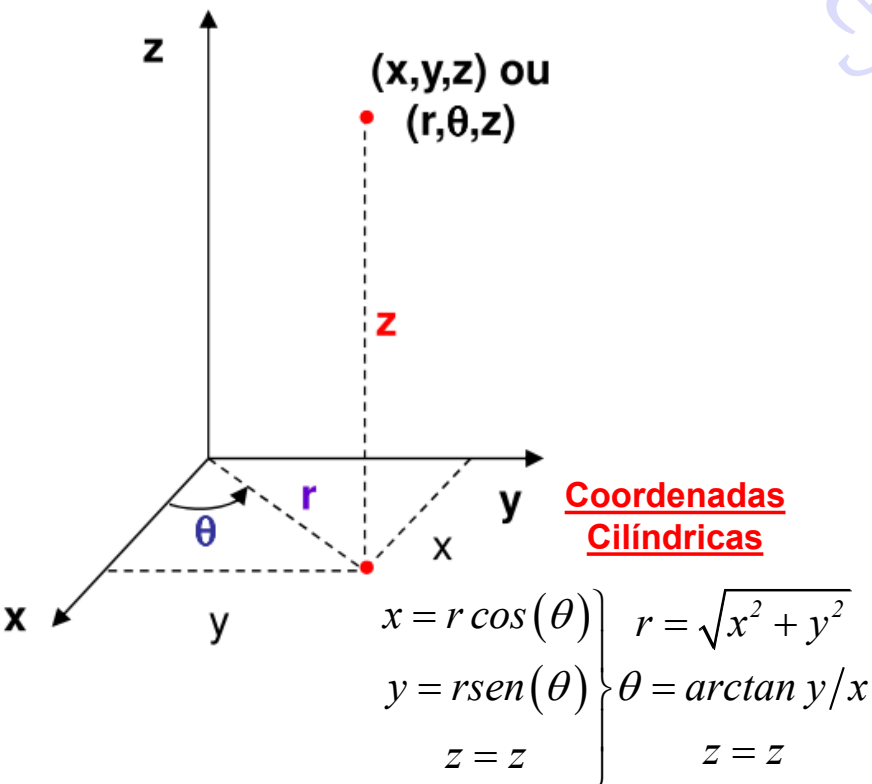
1. Introdução

1.3 Álgebra Tensorial

d) **Operador Nabla** (∇): é um vetor e representa a derivada ou taxa de variação espacial de uma grandeza nas três direções espaciais. Em **coordenadas cartesianas**, pode ser representado como:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}(\)\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}(\)\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}(\)\vec{k}$$

O operador **nabla** pode ser aplicado, também, em coordenadas cilíndricas e esféricas, após as transformações dos vetores unitários e das derivadas parciais, de acordo com as figuras abaixo



1. Introdução

1.3 Álgebra Tensorial

Desta forma, após aplicar a regra da cadeia nas respectivas derivadas e reorganizar, o operador **nabla** em coordenadas cilíndricas e esféricas, se torna, respectivamente:

$$\begin{aligned} \text{Coordenadas Cilíndricas} \quad \nabla &= \frac{\partial}{\partial r} () \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} () \vec{e}_\theta + \frac{\partial}{\partial z} () \vec{e}_z \\ \text{Coordenadas Esféricas} \quad \nabla &= \frac{\partial}{\partial r} () \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} () \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \phi} () \vec{e}_\phi \end{aligned}$$

sendo: $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$, $\vec{e}_\phi$ e $\vec{e}_z$, os vetores unitários das direções radial, circunferencial, azimutal e axial, respectivamente (são usados para diferenciar dos vetores unitários $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$ do sistema cartesiano)

Existem diferentes operações em fenômenos de transporte envolvendo o operador nabla aplicado a escalares, vetores e tensores. Seguem alguns exemplos:

- Gradiente de um Escalar:** é um vetor que representa, fisicamente, o aumento espacial de uma determinada grandeza (ele sempre “aponta” para o sentido de crescimento de uma grandeza física). De uma forma geral, para um escalar C qualquer, tem-se:

$$\nabla C = C \left[\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right] \rightarrow \begin{cases} \text{Coordenada cartesiana} \\ \nabla C = \frac{\partial C}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial C}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial C}{\partial z} \vec{k} \end{cases} \begin{cases} \text{ou} \\ \text{ou} \end{cases} \begin{cases} \text{Coordenada Cilíndrica} \\ \nabla C = \frac{\partial C}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial C}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial C}{\partial z} \vec{e}_z \end{cases} \begin{cases} \text{Coordenada Esférica} \\ \nabla C = \frac{\partial C}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial C}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial C}{\partial \phi} \vec{e}_\phi \end{cases}$$

Ex: o gradiente de pressão, em coordenadas cartesianas, é representado como: $\nabla P = \frac{\partial P}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial P}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial P}{\partial z} \vec{k}$

1. Introdução

1.3 Álgebra Tensorial

- **Divergente de um Vetor** ($\nabla \cdot$): é um escalar que representa, fisicamente, “**uma taxa de deformação**” de uma determinada grandeza. De uma forma geral, para um vetor $\vec{C}$ qualquer, tem-se, em coordenada cartesiana:

$$\nabla \cdot \vec{C} = \left[\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right] \cdot [C_x \vec{i} + C_y \vec{j} + C_z \vec{k}] \longrightarrow \boxed{\nabla \cdot \vec{C} = \frac{\partial C_x}{\partial x} + \frac{\partial C_y}{\partial y} + \frac{\partial C_z}{\partial z}}$$

O divergente do mesmo vetor em coordenadas cilíndricas e esféricas, se torna, respetivamente:

Coordenada Cilíndrica

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{C} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r C_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial C_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial C_z}{\partial z}}$$

Coordenada Esférica

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{C} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 C_r) + \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin(\theta) C_\theta) + \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial C_\phi}{\partial \phi}}$$

Ex: o divergente do vetor velocidade de escoamento de um fluido $\vec{V}$ pode ser representado abaixo, em coordenada cartesiana (daqui pra frente, iremos sempre representar as componentes do vetor velocidade de escoamento de um fluido como: **u, v e w**, nas direções **x, y e z**, respetivamente):

$$\vec{V} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k} \longrightarrow \nabla \cdot \vec{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

Se $\nabla \cdot \vec{V} < 0 \rightarrow$ compressão do fluido

Se $\nabla \cdot \vec{V} = 0 \rightarrow$ escoamento incompressível

Se $\nabla \cdot \vec{V} > 0 \rightarrow$ expansão do fluido

1. Introdução

1.3 Álgebra Tensorial

- Divergente de um Tensor** ($\nabla \cdot$): o divergente de um tensor **T** origina um vetor, como mostrado abaixo, em coordenada cartesiana:

$$\nabla \cdot T = \left[\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right] \cdot \begin{pmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{pmatrix} \quad \text{ou}$$

$$\nabla \cdot T = \left(\frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial T_{zx}}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial T_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{zy}}{\partial z} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial T_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} \right) \vec{k}$$

O divergente do mesmo tensor em coordenadas cilíndricas e esféricas, se torna, respetivamente:

Coordenada Cilíndrica

$$\nabla \cdot T = \left[\frac{\partial T_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\theta r}}{\partial \theta} + \frac{\partial T_{zr}}{\partial z} + \frac{1}{r} (T_{rr} - T_{\theta\theta}) \right] \vec{e}_r + \left[\frac{\partial T_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial T_{z\theta}}{\partial z} + \frac{1}{r} (T_{r\theta} + T_{\theta\theta}) \right] \vec{e}_\theta + \left(\frac{\partial T_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} + \frac{T_{rz}}{r} \right) \vec{e}_z$$

Coordenada Esférica

$$\begin{aligned} \nabla \cdot T = & \left[\frac{\partial T_{rr}}{\partial r} + 2 \frac{T_{rr}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\theta r}}{\partial \theta} + \frac{\cot(\theta)}{r} T_{\theta r} + \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial T_{\phi r}}{\partial \phi} - \frac{1}{r} (T_{\theta\theta} - T_{\phi\phi}) \right] \vec{e}_r + \\ & + \left[\frac{\partial T_{r\theta}}{\partial r} + 2 \frac{T_{r\theta}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\cot(\theta)}{r} T_{\theta\theta} + \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial T_{\phi\theta}}{\partial \phi} + \frac{T_{\theta r}}{r} - \frac{\cot(\theta)}{r} T_{\phi\phi} \right] \vec{e}_\theta + \\ & + \left(\frac{\partial T_{r\phi}}{\partial r} + 2 \frac{T_{r\phi}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\theta\phi}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial T_{\phi\phi}}{\partial \phi} + \frac{T_{\phi r}}{r} + \frac{\cot(\theta)}{r} (T_{\theta\phi} + T_{\phi\theta}) \right) \vec{e}_\phi \end{aligned}$$

1. Introdução

1.3 Álgebra Tensorial

- **Laplaciano de um Escalar** ($\nabla \cdot \nabla$ ou ∇^2): o laplaciano de um escalar C qualquer origina um escalar, como mostrado abaixo em coordenada cartesiana:

$$\nabla \cdot \nabla C = \left[\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right] \cdot \left[\frac{\partial C}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial C}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial C}{\partial z} \vec{k} \right] \rightarrow \boxed{\nabla^2 C = \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2}}$$

O laplaciano do mesmo escalar em coordenadas cilíndricas e esféricas, se torna, respetivamente:

Coordenada Cilíndrica

$$\boxed{\nabla^2 C = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial C}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 C}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2}}$$

Coordenada Esférica

$$\boxed{\nabla^2 C = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial C}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin(\theta) \frac{\partial C}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2(\theta)} \frac{\partial^2 C}{\partial \phi^2}}$$

- **Rotacional de um Vetor** ($\nabla \times$): o rotacional de um vetor $\vec{C}$ qualquer origina um vetor perpendicular à superfície formada pelos outros vetores, como mostrado abaixo em coordenada cartesiana:

$$\nabla \times \vec{C} = \left[\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right] \times [C_x \vec{i} + C_y \vec{j} + C_z \vec{k}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

1. Introdução

1.3 Álgebra Tensorial

ou seja:

$$\nabla \times \vec{C} = \left(\frac{\partial C_z}{\partial y} - \frac{\partial C_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial C_x}{\partial z} - \frac{\partial C_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial C_y}{\partial x} - \frac{\partial C_x}{\partial y} \right) \vec{k}$$

O rotacional do mesmo vetor em coordenadas cilíndricas e esféricas, se torna, respetivamente:

Coordenada
Cilíndrica

$$\nabla \times \vec{C} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial C_z}{\partial \theta} - \frac{\partial C_\theta}{\partial z} \right) \vec{e}_r + \left(\frac{\partial C_r}{\partial z} - \frac{\partial C_z}{\partial r} \right) \vec{e}_\theta + \left\{ \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r C_\theta) - \frac{\partial C_r}{\partial \theta} \right) \right\} \vec{e}_z$$

Coordenada
Esférica

$$\nabla \times \vec{C} = \frac{1}{r \sin(\theta)} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (C_\phi \sin(\theta)) - \frac{\partial C_\theta}{\partial \phi} \right] \vec{e}_r + \left[\frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial C_r}{\partial \phi} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r C_\phi) \right] \vec{e}_\theta + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r C_\theta) - \frac{\partial C_r}{\partial \theta} \right] \vec{e}_\phi$$

Ex: o rotacional do vetor velocidade de escoamento de um fluido $\vec{V}$, também conhecido como “**Vetor Vorticidade**” ($\vec{\omega}$), pode ser representado abaixo em coordenadas cartesianas:

$$\vec{\omega} = \nabla \times \vec{V} = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \vec{k}$$

Se $\nabla \times \vec{V} \neq 0 \rightarrow$ escoamento rotacional

Se $\nabla \times \vec{V} = 0 \rightarrow$ escoamento irrotacional

1. Introdução

1.3 Álgebra Tensorial

Representação dos diferentes tipos de Campos

a) **Campo Escalar:** representação do valor da grandeza escalar como uma função do espaço, **(x, y, z)**, no caso de coordenadas cartesianas, e do tempo **(t)**

Ex: campo escalada da massa específica (**ρ**) em coordenadas cartesianas

$$\rho = \rho(x, y, z, t)$$

b) **Campo Vetorial:** a grandeza vetorial é composta por três (3) componentes escalares, sendo que cada componente do campo vetorial é uma função do espaço **(x, y, z)**, no caso de coordenadas cartesianas, e do tempo **(t)**

$$\vec{V} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k} \quad \left\{ \begin{array}{l} u = u(x, y, z, t) \\ v = v(x, y, z, t) \\ w = w(x, y, z, t) \end{array} \right.$$

c) **Campo Tensorial:** a grandeza tensorial é composta por nove (9) componentes escalares, sendo que cada componente do campo tensorial é uma função do espaço **(x, y, z)**, no caso de coordenadas cartesianas, e do tempo **(t)**

$$T = \begin{pmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{pmatrix} \quad \left\{ \begin{array}{lll} T_{xx} = T_{xx}(x, y, z, t) & T_{yx} = T_{yx}(x, y, z, t) & T_{zx} = T_{zx}(x, y, z, t) \\ T_{xy} = T_{xy}(x, y, z, t) & T_{yy} = T_{yy}(x, y, z, t) & T_{zy} = T_{zy}(x, y, z, t) \\ T_{xz} = T_{xz}(x, y, z, t) & T_{yz} = T_{yz}(x, y, z, t) & T_{zz} = T_{zz}(x, y, z, t) \end{array} \right.$$

1. Introdução

1.3 Álgebra Tensorial

Classificação e Principais Características de um Campo

A depender das características de um determinado campo, o mesmo pode ser classificado em:

I – Campo Permanente ou Estacionário: aquele cujas componentes não variam com o tempo

$$\text{Ex.: } \rho = \rho(x, y, z); \quad \rho = \rho(x, y); \quad \rho = \rho(x)$$

II – Campo Transiente ou Não-Estacionário: aquele cujas componentes variam com o tempo

$$\text{Ex.: } \rho = \rho(x, y, z, t); \quad \rho = \rho(x, y, t); \quad \rho = \rho(x, t); \quad \rho = \rho(t)$$

III – Campo Uniforme: aquele cujas componentes não variam com a posição espacial

$$\text{Ex.: } \rho = \rho(t)$$

IV – Campo Unidimensional: aquele cujas componentes variam ao longo de uma única direção espacial

$$\text{Ex.: } \rho = \rho(x); \quad \rho = \rho(y); \quad \rho = \rho(z); \quad \rho = \rho(x, t); \quad \rho = \rho(y, t); \quad \rho = \rho(z, t)$$

V – Campo Bidimensional: aquele cujas componentes variam ao longo de duas direções espaciais

$$\text{Ex.: } \rho = \rho(x, y); \quad \rho = \rho(x, z); \quad \rho = \rho(y, z); \quad \rho = \rho(x, y, t); \quad \rho = \rho(x, z, t); \quad \rho = \rho(y, z, t)$$

VI – Campo Tridimensional: aquele cujas componentes variam em todas as três direções espaciais

$$\text{Ex.: } \rho = \rho(x, y, z); \quad \rho = \rho(x, y, z, t)$$

Bibliografia

BIRD, R.B.; STEWART, W.E. e; LIGHTFOOT, E.N. Fenômenos de transporte, 2ª ed., LTC, 2004.

ÇENGEL, Y.A e CIMBALA, J.M.; Mecânica dos fluidos, McGraw Hill, 3ª edição, 2015.

WHITE, F. M. Mecânica dos Fluidos. 6ª edição. MCGRAW-HILL, 2011.