ENGENHARIA QUÍMICA
Universidade Federal de Goiás

Introdução

Dimensões e Sistemas de Unidades

Professor Dyrney Araújo dos Santos
Universidade Federal de Goiás
Curso de Engenharia Química
Disciplina: Fenômenos de Transporte 1
site: www.dyrney.com

Professor Dyrney Araújo dos Santos
Universidade Federal de Goiás
Curso de Engenharia Química
site: www.dyrney.com

1. Introdução

1.1 Curiosidades e importância de sistemas de padronização

Mão francesa ou mão inglesa na direção?

Por que na Inglaterra (e em outros países) se dirige pela esquerda?

"Possível explicação": como a maioria das pessoas são destras, durante a era medieval, se alguém atacasse um soldado na estrada, sua mão direita estaria livre para usar uma espada.

Alguns países que adotam este sistema: Além dos britânicos, Japão, Índia, Austrália, África do Sul, Tailândia, Guiana, Zimbábue, etc.

Por que na França (e em outros países) se dirige pela direita?

"Possível explicação": Napoleão Bonaparte era canhoto, por isso ele precisava ficar do lado direito duma via para estar preparado num duelo, já que empunhava sua espada com a mão esquerda. Servia, também, para identificar a sua tropa à distância.

Alguns países que adotam este sistema: Além da França, EUA, Brasil, Alemanha, Rússia, etc.

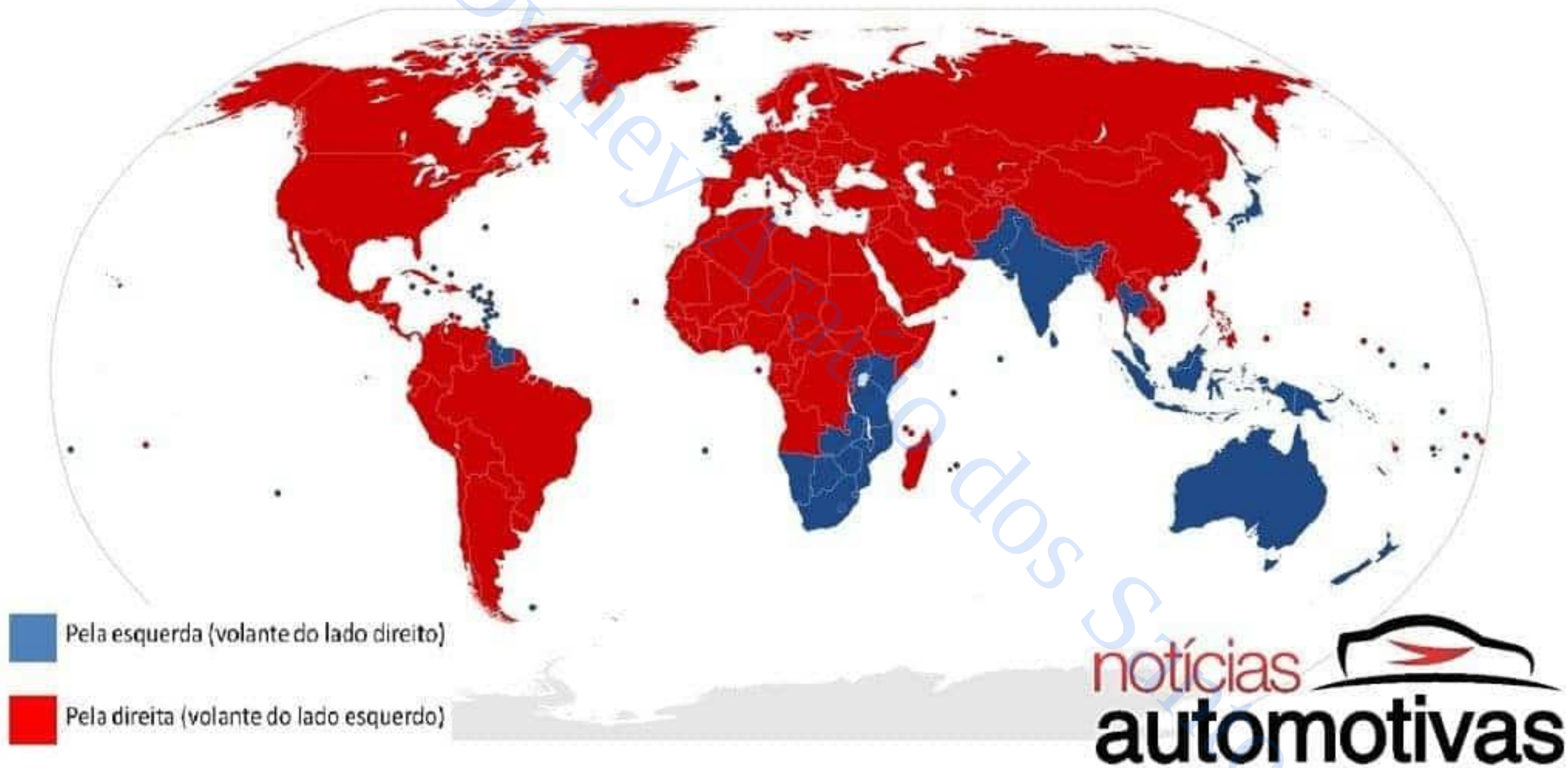
Fontes: https://super.abril.com.br/mundo-estranho/por-que-na-inglaterra-se-dirige-pela-esquerda/; https://apureguria.com/europa/inglaterra/por-que-os-ingleses-dirigem-do-lado-esquerdo/; https://aventurasnahistoria.uol.com.br/noticias/almanaque/historia-por-que-dirigimos-pelo-lado-direito-da-pista.phtml

Professor Dyrney Araújo dos Santos
Universidade Federal de Goiás
Curso de Engenharia Química
site: www.dyrney.com

1. Introdução

1.1 Curiosidades e importância de sistemas de padronização

Mão francesa ou mão inglesa na direção?

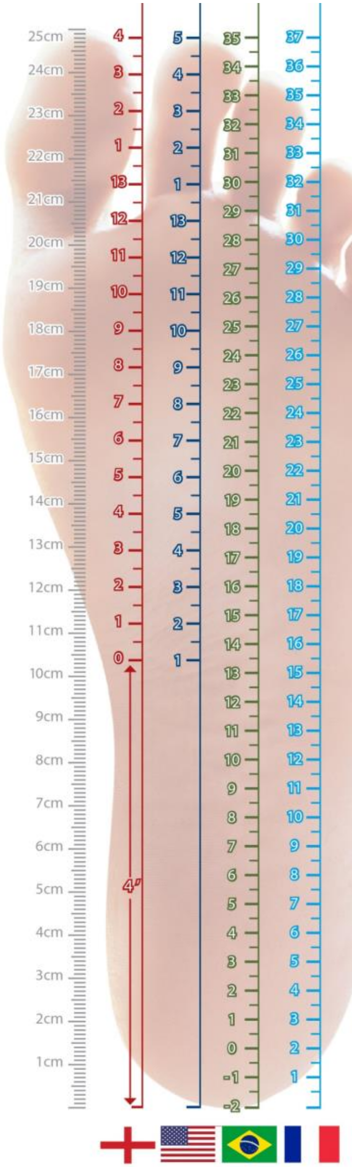


Fonte: https://www.noticiasautomotivas.com.br/por-que-os-carros-ingleses-tem-o-volante-do-lado-direito/

Professor Dyrney Araújo dos Santos
Universidade Federal de Goiás
Curso de Engenharia Química
site: www.dyrney.com

1. Introdução

1.1 Curiosidades e importância de sistemas de padronização



Como surgiu a numeração dos sapatos?

"Ponto Inglês": começou com um decreto do rei Eduardo I, da Inglaterra, em 1305, que estipulou que uma polegada equivaleria a três grãos de cevada secos e alinhados. Por volta do século 17, na Inglaterra, após algumas variações na medida, os sapateiros ingleses adotaram o tamanho de um terço de polegada (0,846 cm = 8,46 mm), o equivalente a um grão de cevada. Durante a Revolução Industrial, as nações europeias decidiram padronizar o tamanho do grão e o transformaram em uma unidade chamada "ponto" ou "ponto inglês". É adotado, hoje, no Reino Unido e em alguns territórios que foram colônias britânicas, como os EUA. Existe, também, o meio ponto (0,423 cm = 4,23 mm), por isto existem sapato 7,5; 8,5; etc;

"Ponto Francês": surgiu em Paris no século 19 e equivale a dois terços de um centímetro (0,66 cm = 6,6 mm). O Brasil, dentre outros países, adota o "ponto francês".

Observação: devido à diferença na largura média dos pés dos cidadãos de cada país, o início da contagem ("ponto 0") é um pouco diferente.

Ex.:

- **No Brasil a contagem começa a partir do -2; logo, se uma pessoa calça 35 no Brasil, seu número francês será 37;**
- **No Brasil, se uma pessoa calça 36, deve pedir um sapato 5 na Inglaterra, visto que até o 13,5 o tamanho é infantil para os ingleses e a contagem recomeça no 13,5 para adultos;**
- **No Japão, a medida é feita como sendo um ponto para cada centímetro do pé, ou seja, se o pé tiver 20 cm, o número do sapato será 20.**

Fonte: https://super.abril.com.br/coluna/oraculo/o-que-significa-a-numeracao-dos-sapatos/; https://super.abril.com.br/comportamento/como-se-mede-o-numero-de-sapato/#:~:text=Ele%20estipulou%20que%20uma%20polegada,38%20e%20assim%20por%20diante; https://capricho.abril.com.br/moda/voce-sabe-numeracao-sapatos-significa/

Professor Dyrney Araújo dos Santos
Universidade Federal de Goiás
Curso de Engenharia Química
site: www.dyrney.com

1. Introdução

1.1 Curiosidades e importância de sistemas de padronização

Confusão de padronização CUSTA CARO!!!!!!!!!

Seguem três, dentre vários, exemplos:

Em 1628, o navio de guerra "Vesa", considerado o mais poderoso do mundo na época, naufragou em sua viagem inaugural, a menos de dois quilômetros da costa. Morreram, no total, 30 tripulantes.

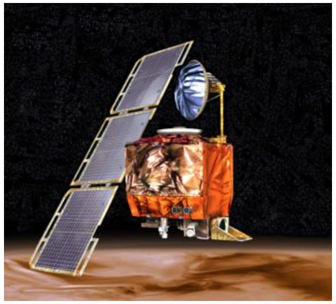
Causa principal do acidente: conflito no uso de sistemas de unidades!

Os arqueólogos encontraram quatro réguas usadas na construção: duas estavam calibradas em pés suecos, que têm 12 polegadas, enquanto as outras usavam pés de Amsterdã, com 11 polegadas.

Em 23 de julho de 1983, um jato Boeing 767-200 (companhia Air Canada), ficou totalmente sem combustível à altitude de 41.000 ft (12.500 m), quando voava sobre o povoado de Gimli, na província canadense de Manitoba. A tripulação conseguiu pousar o avião em segurança!

Causa principal do acidente: conflito no uso de sistemas de unidades!

O Canadá havia adotado o Sistema Internacional de Unidades (S.I.) em 1970. O avião deveria ter sido abastecido com 22.300 kg (49.200 lbm) de combustível, mas recebeu apenas 22.300 lbm (10.100 kg), menos da metade.



Em 23 de setembro de 1999, a comunicação com a sonda da NASA "*Mars Climate Orbiter*" (MCO), que tinha como objetivo o estudo do clima marciano, foi perdida. A sonda foi destruída ao tentar entrar na órbita de Marte! O custo da sonda foi em torno de US$ 125 milhões!

Causa principal do acidente: conflito no uso de sistemas de unidades!

As instruções eram enviadas, da Terra para a sonda, no Sistema Inglês de Unidades, enquanto que a sonda utilizava o Sistema Internacional de Unidades (S.I.)

Fonte: https://cienciaprogramada.com.br/2020/08/nasa-perde-milhoes-erros-unidade/; https://www1.folha.uol.com.br/fsp/turismo/fx1303200017.htm; https://g1.globo.com/mundo/noticia/2014/05/os-dez-maiores-erros-de-calculo-da-ciencia-e-da-engenharia.html; https://pt.wikipedia.org/wiki/Voo_Air_Canada_143

Professor Dyrney Araújo dos Santos
Universidade Federal de Goiás
Curso de Engenharia Química
site: www.dyrney.com

1. Introdução

1.2 Dimensões e Unidades

a) Dimensão: é a medida pela qual uma variável física é expressa quantitativamente

Ex: o comprimento é uma dimensão associada a variáveis como distância, deslocamento, largura, deflexão e altura

i) Dimensões Primárias: nos "fenômenos de transporte" há apenas quatro dimensões primárias das quais todas as outras podem ser derivadas

Massa	(**M**ass)	$\rightarrow$	[M]
Comprimento	(**L**ength)	$\rightarrow$	[L]
Tempo	(**T**ime)	$\rightarrow$	[T]
Temperatura	(**T**emperature)	$\rightarrow$	[θ]

Professor Dyrney Araújo dos Santos
Universidade Federal de Goiás
Curso de Engenharia Química
site: www.dyrney.com

1. Introdução

1.2 Dimensões e Unidades

ii) Dimensões Secundárias: são aquelas cujas existências dependem da combinação entre as Dimensões Primárias.

Ex: a força está diretamente relacionada com massa, comprimento e tempo pela segunda lei de Newton

$$F = ma$$

Por meio desta relação vemos que, dimensionalmente: Força $[ML/T^2]$

Outros exemplos são:

Área $[L^2]$ | Volume $[L^3]$ | Viscosidade $[M/LT]$

Velocidade $[L/T]$ | Aceleração $[L/T^2]$ | Pressão $[M/LT^2]$

Densidade $[M/L^3]$ | Energia $[ML^2/T^2]$ | Tensão $[M/LT^2]$

Professor Dyrney Araújo dos Santos
Universidade Federal de Goiás
Curso de Engenharia Química
site: www.dyrney.com

1. Introdução

1.2 Dimensões e Unidades

b) Unidades: é um modo particular de ligar um número à dimensão quantitativa.

Ex: centímetro e polegadas são ambas unidades numéricas para expressar o comprimento.

i) O Sistema CGS: neste sistema, as unidades fundamentais são:

$$\text{CGS} \rightarrow \begin{cases} \text{L:} & \text{cm} & \text{(centímetro)} \\ \text{M:} & \text{g} & \text{(grama)} \\ \text{T:} & \text{s} & \text{(segundo)} \\ \theta\text{:} & {}^{\circ}\text{C} & \text{(Celsius)} \end{cases}$$

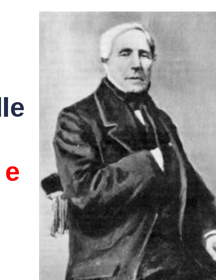
OBS.: duas unidades bastante utilizadas em mecânica dos fluidos no sistema CGS são o ***poise*** (homenagem a **Jean-Léonard-Marie Poiseuille**), unidade de viscosidade dinâmica, e o ***stoke*** (homenagem a **George Gabriel Stokes**), unidade de viscosidade cinemática

Sir George Stokes
(1819 – 1903)
(Matemático e Físico irlandês)

$$1\ \text{P (1 poise)} = 1\ \text{g/(cm.s)}$$

$$1\ \text{St (1stoke)} = 1\text{cm}^2/\text{s}$$

Jean-Léonard-Marie Poiseuille
(1797 – 1869)
(Médico, Físico, Matemático e Fisiólogo francês)



OBS.: Os conceitos de viscosidades dinâmica e cinemática serão posteriormente discutidos neste curso

Professor Dyrney Araújo dos Santos
Universidade Federal de Goiás
Curso de Engenharia Química
site: www.dyrney.com

1. Introdução

1.2 Dimensões e Unidades

ii) O Sistema Internacional (S.I.): adotado em quase todo o planeta desde 1960 com a realização da 11ª Conferência Internacional de Pesos e Medidas

Algumas Dimensões Primárias	Unidades no SI
Massa [M]	kg (quilograma)
Comprimento [L]	m (metro)
Tempo [T]	s (segundo)
Temperatura[θ]	K (Kelvin)
Algumas Dimensões secundárias	**Unidades no SI**
Força [MLT^{-2}]	N (Newton) = $kg.m/s^2$
Pressão ou tensão [$ML^{-1}T^{-2}$]	Pa (Pascal) = $N/m^2 = kg/(m.s^2)$
Energia, calor, trabalho [ML^2T^{-2}]	J (Joule) = N.m = $kg.m^2/s^2$
Potência [ML^2T^{-3}]	W (Watts) = J/s = $kg.m^2/s^3$
Viscosidade [$ML^{-1}T^{-1}$]	Pa.s = kg/(m.s)
Aceleração [LT^{-2}]	m/s^2
Velocidade [LT^{-1}]	m/s

Professor Dyrney Araújo dos Santos
Universidade Federal de Goiás
Curso de Engenharia Química
site: www.dyrney.com

1. Introdução

1.2 Dimensões e Unidades

ii) O Sistema Internacional (S.I.): adotado em quase todo o planeta desde 1960 com a realização da 11ª Conferência Internacional de Pesos e Medidas

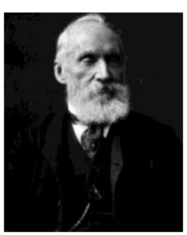
platina-irídio

O peso é definido, atualmente, como a quantidade de eletricidade necessária para neutralizar sua força. É medido por meio da "Balança de Kibble (ou Watt)"

platina-irídio

O metro é definido como o comprimento do trajeto percorrido pela luz no vácuo durante um intervalo de tempo de 1/299 792 458 segundos

O segundo é a duração de 9 192 631 770 períodos da radiação eletromagnética correspondente à transição entre os dois níveis hiperfinos do estado fundamental do átomo de césio 133.



William Thomson (Lorde Kelvin)
(1824 – 1907)
(Físico e engenheiro irlandês)

O kelvin é a fração 1/273,15 da temperatura termodinâmica do ponto triplo da água, ou seja, é defino de tal modo que o ponto triplo da água é exatamente 273,15 K.

Professor Dyrney Araújo dos Santos
Universidade Federal de Goiás
Curso de Engenharia Química
site: www.dyrney.com

1. Introdução

1.2 Dimensões e Unidades

iii) O Sistema Inglês de Engenharia (FPS): No FPS (feet-poundal-second), a massa, o tempo, o comprimento e a temperatura são dados por

$$\underset{\text{(Dimensões Fundamentais)}}{\textbf{FPS}} \rightarrow \begin{cases} \text{Comprimento [L]} & \rightarrow \quad \text{ft} \quad \text{(pé)} \\ \text{Massa [M]:} & \rightarrow \quad lb_m \quad \text{(libra-massa)} \\ \text{Tempo [T]:} & \rightarrow \quad \text{s} \quad \text{(segundo)} \\ \text{Temperatura } [\theta]\text{:} & \rightarrow \quad {}^{o}\text{F} \quad \text{(graus Fahrenheit)} \end{cases}$$

OBS.: neste caso, a lei de newton deve ser reescrita como:

$$F = \frac{ma}{g_c}, \qquad \text{em que} \quad g_c = 32{,}174\,\frac{\text{ft.lbm}}{\text{lbf.s}^2}$$

OBS.: A constante de proporcionalidade, g_c, tem dimensões e um valor numérico diferente de 1 quando se usa o Sistema Inglês de Engenharia. Para o Sistema Internacional, por exemplo, g_c é igual a 1.

Professor Dyrney Araújo dos Santos
Universidade Federal de Goiás
Curso de Engenharia Química
site: www.dyrney.com

1. Introdução

1.2 Dimensões e Unidades

iv) O Sistema Britânico Gravitacional (BG): No sistema BG algumas unidades são: libra-força [F], pés [L], segundos [T], *slugs [M] e grau Rankine [θ].*

Algumas relações entre as dimensões primárias e secundárias nos S.I. e BG

Dimensões	Unidades no SI	Unidades no BG	Fator de conversão
Massa	kg	slug = lbf.s²/ft	1 slug = 14,594 kg
Comprimento	m	ft	1 ft = 0,3048 m
Tempo	s	s	1 s = 1 s
Temperatura	K	°R	1 K = 1,8°R
Velocidade	m/s	ft/s	1 ft/s = 0,3048 m/s
Pressão ou tensão	Pa	lbf/ft²	1 lbf/ft² = 47,88 Pa
Potência	W	ft.lbf/s	1 ft.lbf/s = 1,3558 W
Viscosidade	kg/(m.s)	slugs/(ft.s)	1 slugs/(ft.s) = 47,88 kg/(m.s)

OBS.: Não se tratando do sistema S.I., é comum a energia ser dada em termos de Btu (*British Thermal Unit*) e a potência em hp (*horse power*).

$$1\ \text{hp} = 745{,}7\ \text{W}$$

$$1\ \text{BTU} = 1055\ \text{J}$$

1. Introdução

1.2 Dimensões e Unidades

iv) O Sistema Britânico Gravitacional (BG): No sistema BG as unidades básicas são: libra-força [F], pés [L], segundos [T], *slugs [M] e grau Rankine [θ].*

Comentários adicionais:

1) No sistema BG é, também comum, expressar a pressão em lbf/in² ou psi (“*pounds per square inches”*);

2) No caso de <u>pressão absoluta</u> (conceito que será estudado posteriormente), é utilizado o termo psia (o “a” vem de “*absolute”,* que em português é “absoluto”; logo, em inglês seria “*absolute pressure*”);

3) Já para a <u>pressão relativa</u> (conceito que será estudado posteriormente), utiliza-se o termo psig (o “g” vem de “*gauge*”, que em português pode significar “manométrica” ou “relativa”; logo, em inglês seria “*gauge pressure*”)

<u>Relação entre as principais unidades de pressão</u>

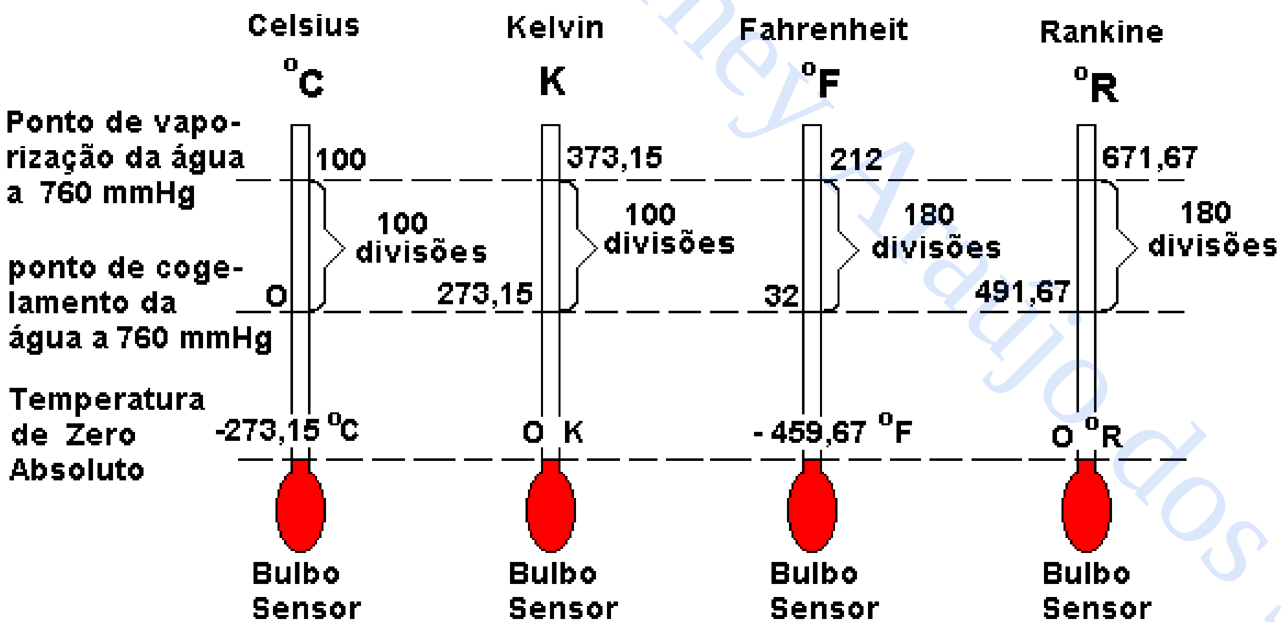
$$1 \text{ atm} = 101325 \text{ Pa} = 14{,}69595 \text{ psi} = 1{,}01325 \text{ bar} = 760 \text{ mmHg} = 10{,}34 \text{ mca} = 1013250 \text{ dyn/cm}^2 = 1{,}0339 \text{ kgf/cm}^2$$

Professor Dyrney Araújo dos Santos
Universidade Federal de Goiás
Curso de Engenharia Química
site: www.dyrney.com

1. Introdução

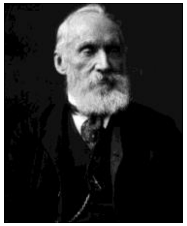
1.2 Dimensões e Unidades

Variações nas escalas de temperatura: as escalas Celsius (T_C) e Kelvin (T_K) possuem a mesma variação de temperatura (possuem 100 intervalos de divisão), diferente das escalas Fahrenheit (T_F) e Rankine (T_R) (possuem 180 intervalos de divisão) que, por sua vez, possuem a mesma variação entre sí.

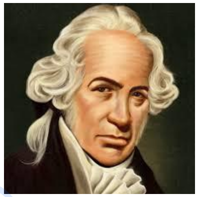


Fonte imagem: notas de aula do professor Santoro (UNISANTA)

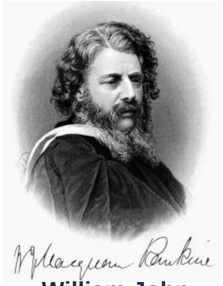
Anders Celsius
(1701 – 1744)
(Astrônomo, físico e geofísico sueco)



William Thomson
(Lorde Kelvin)
(1824 – 1907)
(Físico e engenheiro irlandês)



Daniel Gabriel Fahrenheit
(1686 – 1736)
(Físico e engenheiro alemão)



William John Macquorn Rankine
(1820 – 1872)
(Polímata escocês)

Relação entre as principais unidades de temperatura

$$T_F = \frac{9}{5}T_C + 32; \qquad T_C = \frac{5}{9}\left(T_F - 32\right); \qquad T_R = T_F + 459{,}69; \qquad T_K = T_C + 273{,}15$$

Professor Dyrney Araújo dos Santos
Universidade Federal de Goiás
Curso de Engenharia Química
site: www.dyrney.com

1. Introdução

1.2 Dimensões e Unidades

c) Princípio da Homogeneidade Dimensional: na engenharia e na ciência, todas as equações devem ser dimensionalmente homogêneas, isto é, cada termo aditivo/subtrativo/igualado em uma equação tem de ter as mesmas dimensões.

OBS.: Nos exemplos abaixo, considere m, v, g, ρ, z, ΔP e C como sendo a massa, a velocidade, a aceleração da gravidade, a massa específica, a distância na vertical, a diferença de pressão e uma constante, respectivamente.

Exemplo 1:

$$\text{Energia Cinética} = \frac{mv^2}{2}$$

$$\left[ML^2/T^2\right] = \left[ML^2/T^2\right]$$

Exemplo 2:

$$\frac{v^2}{2} + \frac{\Delta P}{\rho} + gz = C$$

$$[L^2/T^2] + [L^2/T^2] + [L^2/T^2] = [L^2/T^2]$$

Professor Dyrney Araújo dos Santos
Universidade Federal de Goiás
Curso de Engenharia Química
site: www.dyrney.com

1. Introdução

1.2 Dimensões e Unidades

d) Prefixos convenientes para unidades de Engenharia: advém da necessidade e dificuldade de representar graficamente números muito pequenos ou muito grandes.

Fator multiplicativo	Prefixo	Símbolo
10^{12}	tera	T
10^{9}	giga	G
10^{6}	mega	M
10^{3}	quilo	k
10^{2}	hecto	h
10	deca	da
10^{-1}	deci	d
10^{-2}	centi	c
10^{-3}	mili	m
10^{-6}	micro	μ
10^{-9}	nano	n
10^{-12}	pico	p

Exemplos:

P = 114000000 Pa = 114 MPa (mega-pascal)

t = 0,000000003 s = 3 ns (nanossegundos)

1. Introdução

Exercício Proposto 1: A água a 20°C tem uma viscosidade dinâmica μ = 1cp (centipoise). Expresse esses resultados nos seguintes sistemas de unidades:

a) S.I.

b) BG

Exercício Proposto 2: Considere a equação abaixo que descreve o escoamento de um fluido através de um orifício

$$v = C\sqrt{\frac{\Delta P}{\rho}}$$

em que, **v** é a velocidade do fluido, Δ**P** é uma diferença de pressão (queda de pressão), ρ é a densidade do fluido e **C** é uma constante. Determinar a unidade da constante **C** de acordo com o Sistema Internacional (S.I.)

Instituto de Química
IQ - UFG

ENGENHARIA QUÍMICA
Universidade Federal de Goiás

Introdução

Álgebra Tensorial

Professor Dyrney Araújo dos Santos
Universidade Federal de Goiás
Curso de Engenharia Química
Disciplina: Fenômenos de Transporte 1
site: www.dyrney.com

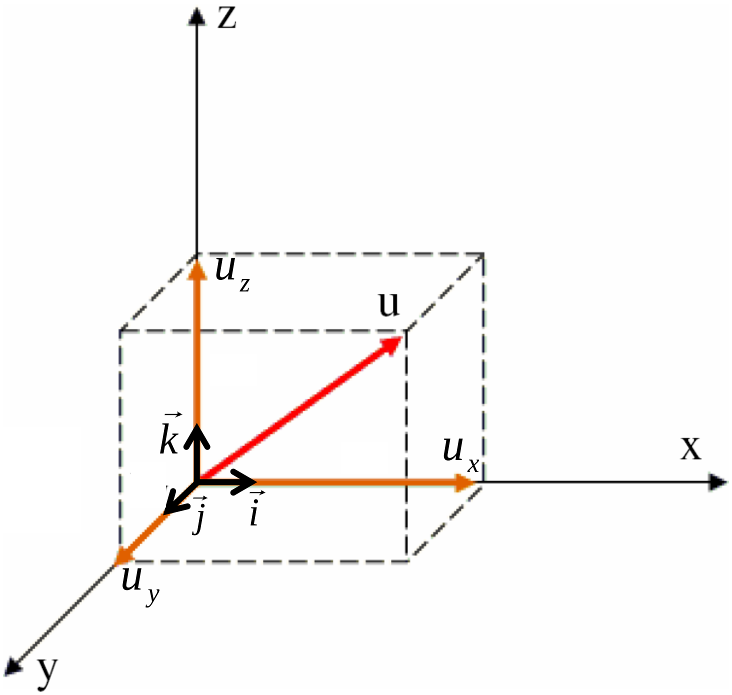
1. Introdução

1.3 Álgebra Tensorial

a) Grandeza Escalar: requer apenas um valor numérico para ser totalmente caracterizada.

Ex: massa, comprimento, área, volume, densidade, viscosidade, condutividade térmica, calor específico, temperatura, etc.

b) Grandeza Vetorial: requer, além do valor numérico (módulo), uma direção e um sentido. Ex: velocidade, aceleração, força, etc.



representação de um vetor "$\vec{u}$" qualquer em coordenadas retangulares ou cartesianas

$$\boxed{\vec{u} = u_x\vec{i} + u_y\vec{j} + u_z\vec{k}}$$

OBS.: u_x, u_y e u_z são escalares (fornece o módulo em cada direção). Logo, suas somas necessitam da multiplicação por vetores unitários i, j e k (fornece a direção e o sentido sem modificar o módulo ou valor numérico).

René Descartes
(1596 – 1650)
(Filósofo, físico e matemático francês)

Professor Dyrney Araújo dos Santos
Universidade Federal de Goiás
Curso de Engenharia Química
site: www.dyrney.com

1. Introdução

1.3 Álgebra Tensorial

Principais Operações Envolvendo Vetores

i) Adição de Vetores: o resultado da soma ou subtração entre vetores é um vetor.

Ex: sejam dois vetores quaisquer, $\vec{u}$ e $\vec{v}$, logo,

$$\vec{u}+\vec{v} = \left(u_x\vec{i}+u_y\vec{j}+u_z\vec{k}\right)+\left(v_x\vec{i}+v_y\vec{j}+v_z\vec{k}\right)$$

$$\boxed{=\left(u_x+v_x\right)\vec{i}+\left(u_y+v_y\right)\vec{j}+\left(u_z+v_z\right)\vec{k}} \longrightarrow \boxed{\text{Vetor}}$$

ii) Multiplicação de um Vetor por um Escalar: o resultado da multiplicação de um vetor ($\vec{u}$) por um escalar (α) é um vetor.

$$\alpha\vec{u} = \alpha\left(u_x\vec{i}+u_y\vec{j}+u_z\vec{k}\right)$$

$$\boxed{=\alpha u_x\vec{i}+\alpha u_y\vec{j}+\alpha u_z\vec{k}} \longrightarrow \boxed{\text{Vetor}}$$

Professor Dyrney Araújo dos Santos
Universidade Federal de Goiás
Curso de Engenharia Química
site: www.dyrney.com

1. Introdução

1.3 Álgebra Tensorial

iii) Produto Escalar entre Vetores: o resultado do produto escalar entre dois vetores, representado por ".", é um escalar. OBS.: Não existe produto escalar entre escalares e nem entre um escalar e um vetor!

Ex: sejam dois vetores quaisquer, $\vec{u}$ e $\vec{v}$, logo,

$$\vec{u}.\vec{v} = \left(u_x\vec{i} + u_y\vec{j} + u_z\vec{k}\right).\left(v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}\right)$$

Aplicando a propriedade distributiva, tem-se:

$$= u_x v_x\left(\vec{i}.\vec{i}\right) + u_x v_y\left(\vec{i}.\vec{j}\right) + u_x v_z\left(\vec{i}.\vec{k}\right) + \ldots + u_z v_z\left(\vec{k}.\vec{k}\right)$$

OBS.: Por definição, o produto escalar entre dois vetores ortogonais unitários "a" e "b" quaisquer é dado por, sendo θ o ângulo formado entre os dois vetores:

$$\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos(\theta) \quad \text{se} \quad \begin{cases} \vec{a} = \vec{b}, \quad \cos(0) = 1 \text{ e } \vec{a}.\vec{b} = 1.1.1 = 1 \\ \vec{a} \neq \vec{b}, \quad \cos(90) = 0 \text{ e } \vec{a}.\vec{b} = 1.1.0 = 0 \end{cases}$$

Logo, retornando à equação anterior, tem-se:

$$\vec{u}.\vec{v} \boxed{= u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z} \longrightarrow \boxed{\text{Escalar}}$$

Professor Dyrney Araújo dos Santos
Universidade Federal de Goiás
Curso de Engenharia Química
site: www.dyrney.com

1. Introdução

1.3 Álgebra Tensorial

iv) Produto Vetorial entre Vetores: o resultado do produto vetorial entre dois vetores, representado por "×", é um vetor normal ao plano definido pelos vetores. **OBS.:** <u>Não existe produto vetorial entre escalares e nem entre um escalar e um vetor!</u>

Ex: sejam dois vetores quaisquer, $\vec{u}$ e $\vec{v}$, logo,

$$\vec{u}\times\vec{v}=\left(u_x\vec{i}+u_y\vec{j}+u_z\vec{k}\right)\times\left(v_x\vec{i}+v_y\vec{j}+v_z\vec{k}\right)$$

Aplicando a propriedade distributiva, tem-se:

$$=u_x v_x\left(\vec{i}\times\vec{i}\right)+u_x v_y\left(\vec{i}\times\vec{j}\right)+u_x v_z\left(\vec{i}\times\vec{k}\right)+\ldots+u_z v_z\left(\vec{k}\times\vec{k}\right)$$

OBS.: Por definição, o produto vetorial entre dois vetores ortogonais unitários "a" e "b" quaisquer é dado por, sendo θ o ângulo formado entre os dois vetores e "n" o vetor unitário perpendicular, tanto ao vetor "a", quanto ao vetor "b" :

$$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{n}\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|sen\left(\theta\right)$$

OBS.: Nota-se que sen(θ) será +1, 0 e -1 quando o ângulo entre "a" e "b" for 90°, 0 e -90°, respectivamente. Usa-se a "Regra da Mão Direita" para se determinar o sentido do novo vetor.

Professor Dyrney Araújo dos Santos
Universidade Federal de Goiás
Curso de Engenharia Química
site: www.dyrney.com

1. Introdução

1.3 Álgebra Tensorial

iv) Produto Vetorial entre Vetores: o resultado do produto vetorial entre dois vetores, representado por "**×**", é um vetor normal ao plano definido pelos vetores. **OBS.:** Não existe produto vetorial entre escalares e nem entre um escalar e um vetor!

Desta forma, tem-se:

$$\boxed{\vec{i}\times\vec{i}=\vec{j}\times\vec{j}=\vec{k}\times\vec{k}=0}$$

$$\boxed{\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}} \quad \boxed{\vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k}} \quad \boxed{\vec{j}\times\vec{k}=\vec{i}} \quad \boxed{\vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i}} \quad \boxed{\vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}} \quad \boxed{\vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j}}$$

Logo, retornando à equação anterior, tem-se:

$$\vec{u}\times\vec{v}\ \boxed{=\left(u_y v_z-u_z v_y\right)\vec{i}+\left(u_z v_x-u_x v_z\right)\vec{j}+\left(u_x v_y-u_y v_x\right)\vec{k}}$$

OBS.: **O mesmo resultado acima pode ser obtido pela resolução do seguinte determinante de matriz**

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{\mathrm{i}} & \vec{\mathrm{j}} & \vec{\mathrm{k}}\\ u_x & u_y & u_z\\ v_x & \mathrm{v}_y & \mathrm{v}_z\end{vmatrix}$$

Professor Dyrney Araújo dos Santos
Universidade Federal de Goiás
Curso de Engenharia Química
site: www.dyrney.com

1. Introdução

1.3 Álgebra Tensorial

v) Produto Triplo entre Vetores: o resultado do produto triplo entre vetores é um escalar.

Ex: sejam três vetores quaisquer, $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$, logo,

OBS.: verifique abaixo a importância em se saber o resultado da operação (ex.: se resultará em escalar, vetor, etc.) para que se saiba por onde começar a operação (pelo "." ou "×"?)

$$\vec{u}.\vec{v}\times\vec{w} = \vec{u}.\left(\vec{v}\times\vec{w}\right) = \left(u_x\vec{i}+u_y\vec{j}+u_z\vec{k}\right).\left[\left(v_x\vec{i}+v_y\vec{j}+v_z\vec{k}\right)\times\left(w_x\vec{i}+w_y\vec{j}+w_z\vec{k}\right)\right]$$

Aplicando a propriedade distributiva e as propriedades do produto escalar e vetorial, feitas anteriormente, tem-se, após rearranjo:

$$\vec{u}.\left(\vec{v}\times\vec{w}\right)\boxed{= u_y v_z w_x + u_z v_x w_y + u_x v_y w_z - u_z v_y w_x - u_y v_x w_z - u_x v_z w_y}$$

OBS.: O mesmo resultado acima pode ser obtido pela resolução do seguinte determinante de matriz

$$\vec{u}.\left(\vec{v}\times\vec{w}\right) = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix}$$

Professor Dyrney Araújo dos Santos
Universidade Federal de Goiás
Curso de Engenharia Química
site: www.dyrney.com

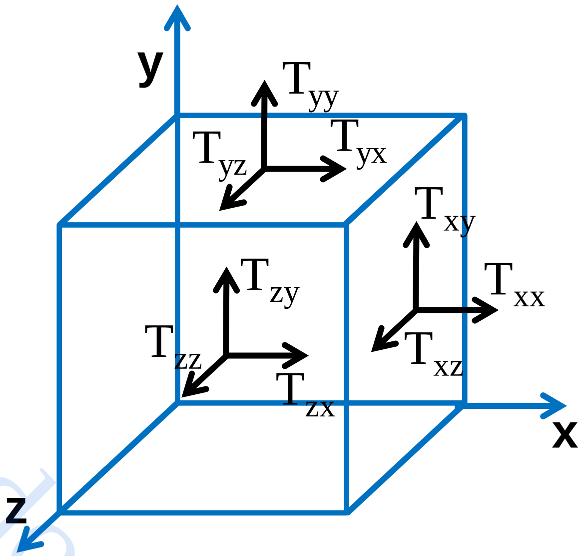
1. Introdução

1.3 Álgebra Tensorial

c) Grandeza Tensorial: um tensor, ao contrário de um vetor, possui 9 componentes, originadas das interações de uma força (3 componentes) sobre uma superfície (3 possibilidades de ação). Logo, um tensor possui 3 componentes em cada direção espacial.

$$T = \frac{F}{A} \longrightarrow$$

Possui unidades no S.I. em N/m^2 ou Pa



Representação geral do tensor T_{ij}

i = direção normal à aplicação da força

j = direção da força

Existem dois tipos básicos de tensões que agem sobre uma superfície:

Tensões normais: **agem perpendicularmente à face do cubo (T_{ii} ou T_{jj})**

Tensões de cisalhamento: **agem tangencialmente à face do cubo (T_{ij}).**

Professor Dyrney Araújo dos Santos
Universidade Federal de Goiás
Curso de Engenharia Química
site: www.dyrney.com

1. Introdução

1.3 Álgebra Tensorial

c) Grandeza Tensorial: um tensor, ao contrário de um vetor, possui 9 componentes, originadas das interações de uma força (3 componentes) sobre uma superfície (3 possibilidades de ação). Logo, um tensor possui 3 componentes em cada uma das três direções espaciais.

OBS.: As componentes de um tensor podem ser melhor representadas na forma matricial (matriz 3×3), sendo "i" relacionado às linhas e "j" às colunas. Este formato matricial facilita nas seguintes identificações:

$$T = \begin{pmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{pmatrix}$$

A diagonal principal representa os tensores normais, sendo os demais cisalhantes

1ª coluna: componentes de T que agem na direção "i" ou "x"

2ª coluna: componentes de T que agem na direção "j" ou "y"

3ª coluna: componentes de T que agem na direção "k" ou "z"

OBS.: Visto que cada coluna representa as componentes do tensor que agem em uma determinada direção, em termos das direções i, j e k, T pode ser representado como:

$$T = \left(T_{xx}, T_{yx}, T_{zx}\right)\vec{i} + \left(T_{xy}, T_{yy}, T_{zy}\right)\vec{j} + \left(T_{xz}, T_{yz}, T_{zz}\right)\vec{k}$$

1. Introdução

1.3 Álgebra Tensorial

Exemplos de Operações Envolvendo Tensores

i) Soma de Tensores: **o resultado da soma entre tensores é um tensor.**

Ex: **sejam dois tensores quaisquer,** T **e** S**, logo:**

$$T+S=\begin{pmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} S_{xx} & S_{xy} & S_{xz} \\ S_{yx} & S_{yy} & S_{yz} \\ S_{zx} & S_{zy} & S_{zz} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} T_{xx}+S_{xx} & T_{xy}+S_{xy} & T_{xz}+S_{xz} \\ T_{yx}+S_{yx} & T_{yy}+S_{yy} & T_{yz}+S_{yz} \\ T_{zx}+S_{zx} & T_{zy}+S_{zy} & T_{zz}+S_{zz} \end{pmatrix}$$

Ou, de outra forma

$$T+S=\left[\left(T_{xx}+S_{xx}\right),\left(T_{yx}+S_{yx}\right),\left(T_{zx}+S_{zx}\right)\right]\vec{i}+$$
$$+\left[\left(T_{xy}+S_{xy}\right),\left(T_{yy}+S_{yy}\right),\left(T_{zy}+S_{zy}\right)\right]\vec{j}+$$
$$+\left[\left(T_{xz}+S_{xz}\right),\left(T_{yz}+S_{yz}\right),\left(T_{zz}+S_{zz}\right)\right]\vec{k}$$

1. Introdução

1.3 Álgebra Tensorial

ii) Produto escalar entre um Vetor e um Tensor: o resultado do produto escalar entre um vetor e um tensor é um vetor.

Ex: seja um vetor $\vec{u}$ e um tensor T, logo:

$$\vec{u}.T = \left(u_x\vec{i} + u_y\vec{j} + u_z\vec{k}\right).\begin{pmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{pmatrix}$$

Ou, de outra forma

$$\vec{u}.T = \left(u_xT_{xx} + u_yT_{yx} + u_zT_{zx}\right)\vec{i} +$$
$$+\left(u_xT_{xy} + u_yT_{yy} + u_zT_{zy}\right)\vec{j} +$$
$$+\left(u_xT_{xz} + u_yT_{yz} + u_zT_{zz}\right)\vec{k}$$

Professor Dyrney Araújo dos Santos
Universidade Federal de Goiás
Curso de Engenharia Química
site: www.dyrney.com

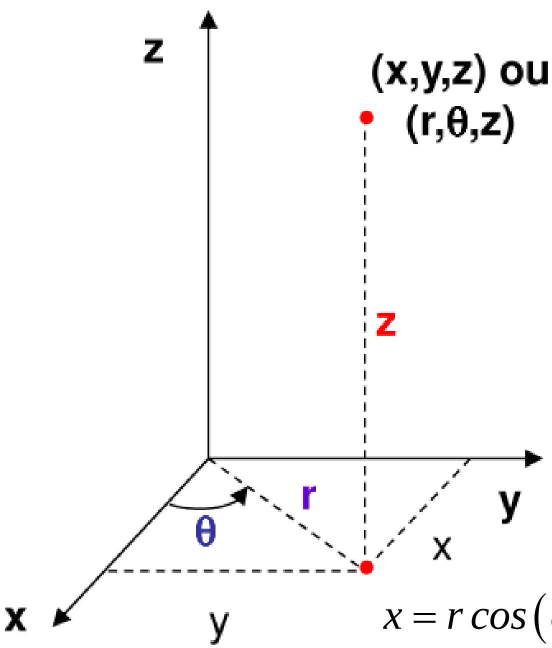
1. Introdução

1.3 Álgebra Tensorial

d) Operador Nabla (∇): é um vetor e representa a derivada ou taxa de variação espacial de uma grandeza nas três direções espaciais. Em coordenadas cartesianas, pode ser representado como:

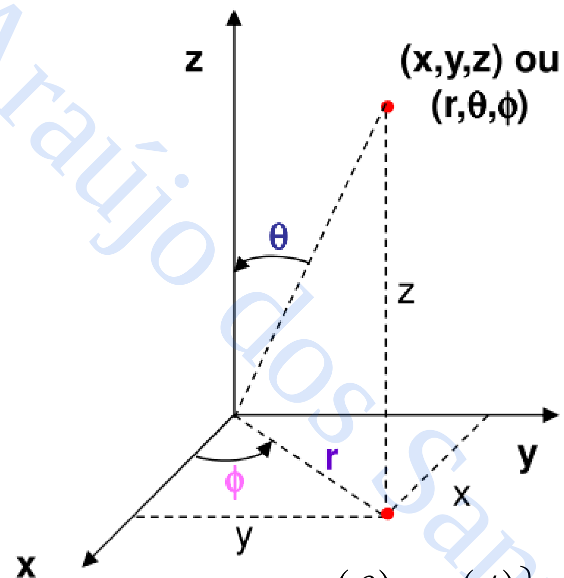
$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}(\ )\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}(\ )\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}(\ )\vec{k}$$

OBS.: O operador nabla pode ser aplicado, também, em coordenas cilíndricas e esféricas, após as transformações dos vetores unitários e das derivadas parciais, de acordo com as figuras abaixo



Coordenadas Cilíndricas

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos(\theta) \\ y &= r sen(\theta) \\ z &= z \end{aligned}\right\} \begin{aligned} r &= \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta &= arctan\, y/x \\ z &= z \end{aligned}$$



Coordenadas Esféricas

$$\left.\begin{aligned} x &= r sen(\theta)\cos(\phi) \\ y &= r sen(\theta) sen(\phi) \\ z &= r\cos(\theta) \end{aligned}\right\} \begin{aligned} r &= \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \theta &= arctan\left(\sqrt{x^2+y^2}/z\right) \\ z &= arctan\, y/x \end{aligned}$$

Professor Dyrney Araújo dos Santos
Universidade Federal de Goiás
Curso de Engenharia Química
site: www.dyrney.com

1. Introdução

1.3 Álgebra Tensorial

Desta forma, após aplicar a regra da cadeia nas respectivas derivadas e rearranjar, o operador nabla em coordenadas cilíndricas e esféricas, se torna, respetivamente:

Coordenadas Cilíndricas

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial r}(\ )\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(\ )\vec{e}_\theta + \frac{\partial}{\partial z}(\ )\vec{e}_z$$

e

Coordenadas Esféricas

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial r}(\ )\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(\ )\vec{e}_\theta + \frac{1}{rsen(\theta)}\frac{\partial}{\partial \phi}(\ )\vec{e}_\phi$$

sendo: e_r, e_θ, e_ϕ e e_z, os vetores unitários das direções radial, circunferencial, azimutal e axial, respectivamente (são usados para diferenciar dos vetores unitários *i*, *j* e *k* do sistema cartesiano)

Existem diferentes operações em fenômenos de transporte envolvendo o operador nabla aplicado a escalares, vetores e tensores. Seguem alguns exemplos:

- **Gradiente de um Escalar: é um vetor que representa, fisicamente, o aumento espacial de uma determinada grandeza (ele sempre "aponta" para o sentido de crescimento de uma grandeza física). De uma forma geral, para um escalar C qualquer, tem-se:**

$$\nabla C = C\left[\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right] \rightarrow$$

Coordenada cartesiana

$$\boxed{\nabla C = \frac{\partial C}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial C}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial C}{\partial z}\vec{k}}$$

ou

$$\boxed{\nabla C = \frac{\partial C}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial C}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{\partial C}{\partial z}\vec{e}_z}$$

Coordenada Cilíndrica

ou

$$\boxed{\nabla C = \frac{\partial C}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial C}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{rsen(\theta)}\frac{\partial C}{\partial \phi}\vec{e}_\phi}$$

Coordenada Esférica

Ex: o gradiente de pressão, em coordenadas cartesianas, é representado como: $\nabla P = \frac{\partial P}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial P}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial P}{\partial z}\vec{k}$

1. Introdução

1.3 Álgebra Tensorial

- **Divergente de um Vetor ($\nabla.$): é um escalar que representa, fisicamente, "uma taxa de deformação" de uma determinada grandeza. De uma forma geral, para um vetor $\vec{C}$ qualquer, tem-se, em coordenada cartesiana:**

$$\nabla.\vec{C} = \left[\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right].\left[C_x\vec{i} + C_y\vec{j} + C_z\vec{k}\right] \longrightarrow \boxed{\nabla.\vec{C} = \frac{\partial C_x}{\partial x} + \frac{\partial C_y}{\partial y} + \frac{\partial C_z}{\partial z}}$$

OBS.: o divergente do mesmo vetor em coordenadas cilíndricas e esféricas, se torna, respetivamente:

Coordenada Cilíndrica

$$\boxed{\nabla.\vec{C} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rC_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial C_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial C_z}{\partial z}}$$

Coordenada Esférica

$$\boxed{\nabla.\vec{C} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 C_r\right) + \frac{1}{rsen(\theta)}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(sen(\theta)C_\theta\right) + \frac{1}{rsen(\theta)}\frac{\partial C_\phi}{\partial \phi}}$$

Ex: o divergente do vetor velocidade de escoamento de um fluido $\vec{V}$ pode ser representado abaixo, em coordenada cartesiana (daqui pra frente, iremos sempre representar as componentes do vetor velocidade de escoamento de um fluido como: *u*, *v* e *w*, nas direções *x*, *y* e *z*, respectivamente):

$$\vec{V} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k} \longrightarrow \nabla.\vec{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

OBS.:

Se $\nabla.\vec{V} < 0 \rightarrow$ **compressão do fluido**

Se $\nabla.\vec{V} = 0 \rightarrow$ **escoamento incompressível**

Se $\nabla.\vec{V} > 0 \rightarrow$ **espansão do fluido**

Professor Dyrney Araújo dos Santos
Universidade Federal de Goiás
Curso de Engenharia Química
site: www.dyrney.com

1. Introdução

1.3 Álgebra Tensorial

- **Divergente de um Tensor ($\nabla.$): o divergente de um tensor T origina um vetor, como mostrado abaixo, em coordenada cartesiana:**

$$\nabla.T = \left[\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right].\begin{pmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{pmatrix}$$

ou

$$\nabla.T = \left(\frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial T_{zx}}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial T_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{zy}}{\partial z}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial T_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z}\right)\vec{k}$$

OBS.: o divergente do mesmo tensor em coordenadas cilíndricas e esféricas, se torna, respetivamente:

Coordenada Cilíndrica

$$\nabla.T = \left[\frac{\partial T_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial T_{\theta r}}{\partial \theta} + \frac{\partial T_{zr}}{\partial z} + \frac{1}{r}\left(T_{rr} - T_{\theta\theta}\right)\right]\vec{e}_r + \left[\frac{\partial T_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial T_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial T_{z\theta}}{\partial z} + \frac{1}{r}\left(T_{r\theta} + T_{\theta\theta}\right)\right]\vec{e}_\theta + \left(\frac{\partial T_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial T_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} + \frac{T_{rz}}{r}\right)\vec{e}_z$$

Coordenada Esférica

$$\nabla.T = \left[\frac{\partial T_{rr}}{\partial r} + 2\frac{T_{rr}}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial T_{\theta r}}{\partial \theta} + \frac{cot(\theta)}{r}T_{\theta r} + \frac{1}{rsen(\theta)}\frac{\partial T_{\phi r}}{\partial \phi} - \frac{1}{r}\left(T_{\theta\theta} - T_{\phi\phi}\right)\right]\vec{e}_r + \left[\frac{\partial T_{r\theta}}{\partial r} + 2\frac{T_{r\theta}}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial T_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{cot(\theta)}{r}T_{\theta\theta} + \frac{1}{rsen(\theta)}\frac{\partial T_{\phi\theta}}{\partial \phi} + \frac{T_{\theta r}}{r} - \frac{cot(\theta)}{r}T_{\phi\phi}\right]\vec{e}_\theta + \left(\frac{\partial T_{r\phi}}{\partial r} + 2\frac{T_{r\phi}}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial T_{\theta\phi}}{\partial \theta} + \frac{1}{rsen(\theta)}\frac{\partial T_{\phi\phi}}{\partial \phi} + \frac{T_{\phi r}}{r} + \frac{cot(\theta)}{r}\left(T_{\theta\phi} + T_{\phi\theta}\right)\right)\vec{e}_\phi$$

Professor Dyrney Araújo dos Santos
Universidade Federal de Goiás
Curso de Engenharia Química
site: www.dyrney.com

1. Introdução

1.3 Álgebra Tensorial

- **Laplaciano de um Escalar ($\nabla.\nabla$ ou ∇^2): o laplaciano de um escalar C qualquer origina um escalar, como mostrado abaixo em coordenada cartesiana:**

$$\nabla.\nabla C=\left[\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right].\left[\frac{\partial C}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial C}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial C}{\partial z}\vec{k}\right] \longrightarrow \boxed{\nabla^2 C=\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 C}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 C}{\partial z^2}}$$

OBS.: o laplaciano do mesmo escalar em coordenadas cilíndricas e esféricas, se torna, respetivamente:

Coordenada Cilíndrica

$$\boxed{\nabla^2 C=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial C}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 C}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 C}{\partial z^2}}$$

Coordenada Esférica

$$\boxed{\nabla^2 C=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial C}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2 sen(\theta)}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(sen(\theta)\frac{\partial C}{\partial \theta}\right)+\frac{1}{r^2 sen^2(\theta)}\frac{\partial^2 C}{\partial \phi^2}}$$

- **Rotacional de um Vetor ($\nabla\times$): o rotacional de um vetor $\vec{C}$ qualquer origina um vetor perpendicular à superfície formada pelos outros vetores, como mostrado abaixo em coordenada cartesiana:**

$$\nabla\times\vec{C}=\left[\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right]\times\left[C_x\vec{i}+C_y\vec{j}+C_z\vec{k}\right]=\begin{vmatrix}\vec{\mathrm{i}} & \vec{\mathrm{j}} & \vec{\mathrm{k}}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ C_x & C_y & C_z\end{vmatrix}$$

Professor Dyrney Araújo dos Santos
Universidade Federal de Goiás
Curso de Engenharia Química
site: www.dyrney.com

1. Introdução

1.3 Álgebra Tensorial

ou seja:

$$\nabla \times \vec{C} = \left(\frac{\partial C_z}{\partial y} - \frac{\partial C_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial C_x}{\partial z} - \frac{\partial C_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial C_y}{\partial x} - \frac{\partial C_x}{\partial y} \right) \vec{k}$$

OBS.: o rotacional do mesmo vetor em coordenadas cilíndricas e esféricas, se torna, respetivamente:

Coordenada Cilíndrica

$$\nabla \times \vec{C} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial C_z}{\partial \theta} - \frac{\partial C_\theta}{\partial z} \right) \vec{e}_r + \left(\frac{\partial C_r}{\partial z} - \frac{\partial C_z}{\partial r} \right) \vec{e}_\theta + \left\{ \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(r C_\theta \right) - \frac{\partial C_r}{\partial \theta} \right) \right\} \vec{e}_z$$

Coordenada Esférica

$$\nabla \times \vec{C} = \frac{1}{rsen(\theta)} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(C_\phi sen(\theta) \right) - \frac{\partial C_\theta}{\partial \phi} \right] \vec{e}_r + \left[\frac{1}{rsen(\theta)} \frac{\partial C_r}{\partial \phi} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r C_\phi \right) \right] \vec{e}_\theta + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r C_\theta \right) - \frac{\partial C_r}{\partial \theta} \right] \vec{e}_\phi$$

Ex: o rotacional do vetor velocidade de escoamento de um fluido $\vec{V}$, também conhecido como "Vetor Vorticidade" ($\vec{\omega}$) pode ser representado abaixo, em coordenadas cartesianas:

$$\vec{\omega} = \nabla \times \vec{V} = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \vec{k}$$

OBS.:

Se $\nabla \times \vec{V} \neq 0 \rightarrow$ **escoamento rotacional**

Se $\nabla \times \vec{V} = 0 \rightarrow$ **escoamento irrotacional**

O sentido da rotação é dado pela "Regra da Mão Direita"

Professor Dyrney Araújo dos Santos
Universidade Federal de Goiás
Curso de Engenharia Química
site: www.dyrney.com

1. Introdução

1.3 Álgebra Tensorial

Representação dos diferentes tipos de Campos

a) Campo Escalar: representação do valor da grandeza escalar como uma função do espaço, (x, y, z), no caso de coordenadas cartesianas, e do tempo (t)

Ex: campo escalada da massa específica (ρ) em coordenadas cartesianas

$$\rho = \rho\left(x, y, z, t\right)$$

b) Campo Vetorial: a grandeza vetorial é composta por três (3) componentes escalares, sendo que cada componente do campo vetorial é uma função do espaço (x, y, z), no caso de coordenadas cartesianas, e do tempo (t)

$$\vec{V} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k} \quad \begin{cases} u = u\left(x, y, z, t\right) \\ v = v\left(x, y, z, t\right) \\ w = w\left(x, y, z, t\right) \end{cases}$$

c) Campo Tensorial: a grandeza tensorial é composta por nove (9) componentes escalares, sendo que cada componente do campo tensorial é uma função do espaço (x, y, z), no caso de coordenadas cartesianas, e do tempo (t)

$$T = \begin{pmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{pmatrix} \quad \begin{cases} \mathrm{T_{xx}} = \mathrm{T_{xx}}\left(x, y, z, t\right) & \mathrm{T_{yx}} = \mathrm{T_{yx}}\left(x, y, z, t\right) & \mathrm{T_{zx}} = \mathrm{T_{zx}}\left(x, y, z, t\right) \\ \mathrm{T_{xy}} = \mathrm{T_{xy}}\left(x, y, z, t\right) & \mathrm{T_{yy}} = \mathrm{T_{yy}}\left(x, y, z, t\right) & \mathrm{T_{zy}} = \mathrm{T_{zy}}\left(x, y, z, t\right) \\ \mathrm{T_{xz}} = \mathrm{T_{xz}}\left(x, y, z, t\right) & \mathrm{T_{yz}} = \mathrm{T_{yz}}\left(x, y, z, t\right) & \mathrm{T_{zz}} = \mathrm{T_{zz}}\left(x, y, z, t\right) \end{cases}$$

Professor Dyrney Araújo dos Santos
Universidade Federal de Goiás
Curso de Engenharia Química
site: www.dyrney.com

1. Introdução

1.3 Álgebra Tensorial

Classificação e Principais Características de um Campo

A depender das características de um determinado campo, o mesmo pode ser classificado em:

I – Campo Permanente ou Estacionário: aquele cujas componentes não variam com o tempo

Ex.: $\rho=\rho(x,y,z);\quad \rho=\rho(x,y);\quad \rho=\rho(x)$

II – Campo Transiente ou Não-Estacionário: aquele cujas componentes variam com o tempo

Ex.: $\rho=\rho(x,y,z,t);\quad \rho=\rho(x,y,t);\quad \rho=\rho(x,t);\ \rho=\rho(t)$

III – Campo Uniforme: aquele cujas componentes não variam com a posição espacial

Ex.: $\rho=\rho(t)$

IV – Campo Unidimensional: aquele cujas componentes variam ao longo de uma única direção espacial

Ex.: $\rho=\rho(x);\quad \rho=\rho(y);\quad \rho=\rho(z);\ \rho(x,t);\quad \rho=\rho(y,t);\quad \rho=\rho(z,t)$

V – Campo Bidimensional: aquele cujas componentes variam ao longo de duas direções espaciais

Ex.: $\rho=\rho(x,y);\quad \rho=\rho(x,z);\quad \rho=\rho(y,z);\ \rho(x,y,t);\quad \rho=\rho(x,z,t);\quad \rho=\rho(y,z,t)$

VI – Campo Tridimensional: aquele cujas componentes variam em todas as três direções espaciais

Ex.: $\rho=\rho(x,y,z);\quad \rho=\rho(x,y,z,t)$

Bibliografia

BIRD, R.B.; STEWART, W.E. e; LIGHTFOOT, E.N. Fenômenos de transporte, 2ª ed., LTC, 2004.

ÇENGEL, Y.A e CIMBALA, J.M.; Mecânica dos fluidos, McGraw Hill, 3ª edição, 2015.

WHITE, F. M. Mecânica dos Fluidos. 6ª edição. MCGRAW-HILL, 2011.