

ENGENHARIA QUÍMICA
Universidade Federal de Goiás

Estática dos Fluidos

Distribuição de pressão em um fluido

Professor Dyrney Araújo dos Santos
Universidade Federal de Goiás
Curso de Engenharia Química
Disciplina: Fenômenos de Transporte 1
site: www.dyrney.com

Professor Dyrney Araújo dos Santos

Professor Dyrney Araújo dos Santos
Universidade Federal de Goiás
Curso de Engenharia Química
site: www.dyrney.com

3. Estática dos Fluidos

3.1 Forças que agem sobre uma partícula de fluido em repouso

As forças que agem sobre uma partícula de fluido em repouso são: força de pressão e força gravitacional. Ter em mente que as forças viscosas só agem sobre um fluido em movimento.

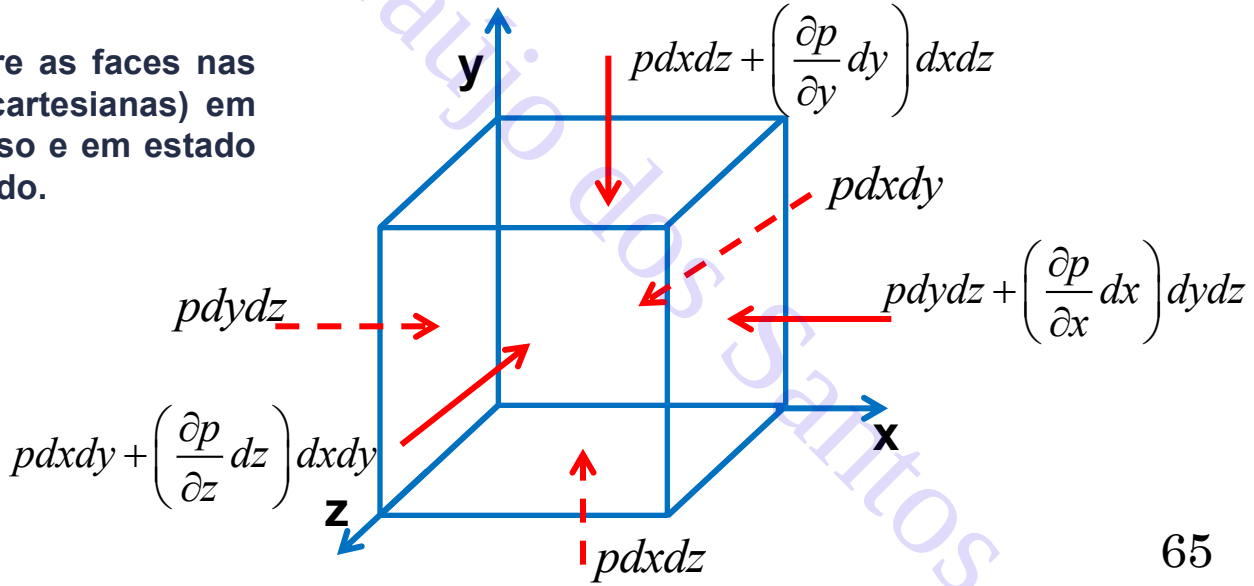
Estas forças podem ser classificadas em:

- **Forças de superfície: são aquelas forças que atuam diretamente sobre as faces da partícula de fluido, tal como a força de pressão, dentre outras tensões (normais e cisalhantes).**
- **Forças de campo: são aquelas decorrentes dos potenciais eletromagnético ou gravitacional, agindo sobre toda a massa da partícula de fluido. Aqui iremos considerar apenas a força gravitacional**

A) Força de pressão: a pressão é uma tensão normal que age sempre no sentido "para dentro" do corpo. Ela causa uma força líquida em uma partícula de fluido quando ela varia espacialmente

Considere a pressão agindo sobre as faces nas direções x, y e z (coordenadas cartesianas) em uma partícula de fluido em repouso e em estado estacionário, como na figura ao lado.

$$p = p(x, y, z)$$



Professor Dyrney Araújo dos Santos

Professor Dyrney Araújo dos Santos
Universidade Federal de Goiás
Curso de Engenharia Química
site: www.dyrney.com

3. Estática dos Fluidos

3.1 Forças que agem sobre uma partícula de fluido em repouso

A força de pressão líquida na direção x sobre a partícula de fluido é dada por:

$$dF_x = pdydz - \left[pdydz + \left(\frac{\partial p}{\partial x} dx \right) dydz \right] \quad \text{ou} \quad dF_x = -\frac{\partial p}{\partial x} dxdydz$$

De maneira semelhante, as forças de pressão líquidas dF_y e dF_z, são dadas abaixo:

$$dF_y = -\frac{\partial p}{\partial y} dxdydz \quad \text{e} \quad dF_z = -\frac{\partial p}{\partial z} dxdydz$$

Combinando as componentes da força de pressão anteriores na forma vetorial, tem-se:

$$d\vec{F} = \left(-\frac{\partial p}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial p}{\partial y}\vec{j} - \frac{\partial p}{\partial z}\vec{k} \right) dxdydz$$

Pode-se identificar o termo entre parênteses como o negativo do vetor gradiente de pressão. Representando por $f_{pressão}$ a força líquida de pressão por unidade de volume do elemento, teremos:

$$\boxed{d\vec{f}_{pressão} = -\nabla p}$$

Logo, não é a pressão, mas sim o gradiente de pressão que causa uma força líquida.

Professor Dyrney Araújo dos Santos

Professor Dyrney Araújo dos Santos
Universidade Federal de Goiás
Curso de Engenharia Química
site: www.dyrney.com

3. Estática dos Fluidos

3.1 Forças que agem sobre uma partícula de fluido em repouso

B) Força gravitacional: Considerando uma partícula de fluido em coordenadas cartesianas, a força gravitacional agindo sobre toda a sua massa pode ser representada como

$$d\vec{F}_{grav} = \rho \vec{g} dx dy dz$$

ou, no caso da força gravitacional por unidade de volume do elemento, tem-se:

$$\boxed{d\vec{f}_{grav} = \rho \vec{g}}$$

Finalmente, aplicando a Segunda Lei de Newton a uma partícula de fluido em repouso, teremos, visto que neste caso a aceleração a = 0:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} = 0 \longrightarrow d\vec{f}_{pressão} + d\vec{f}_{grav} = 0 \longrightarrow \boxed{\nabla p = \rho \vec{g}}$$

Esta equação é conhecida como a "Equação da Estática dos Fluidos", sendo que a importância dela será demostrada a seguir

A Equação da Estática dos Fluidos é vetorial e diferencial e representa uma distribuição de pressão hidrostática no interior de qualquer fluido em repouso, independente de sua reologia. Para as três direções cartesianas, tem-se:

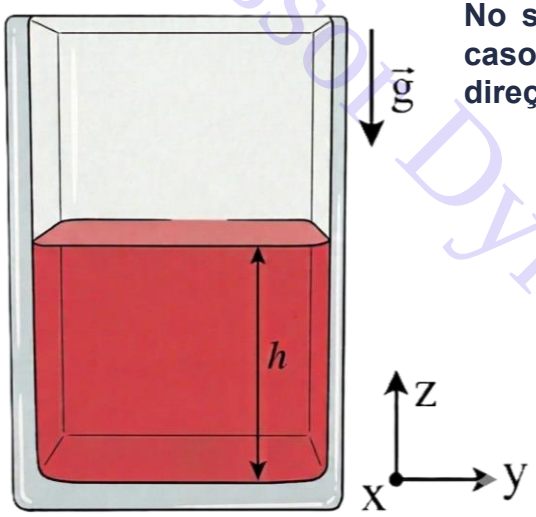
$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho g_x \qquad \frac{\partial p}{\partial y} = \rho g_y \qquad \frac{\partial p}{\partial z} = \rho g_z$$

Professor Dyrney Araújo dos Santos

Professor Dyrney Araújo dos Santos
Universidade Federal de Goiás
Curso de Engenharia Química
site: www.dyrney.com

3. Estática dos Fluidos

3.1 Forças que agem sobre uma partícula de fluido em repouso



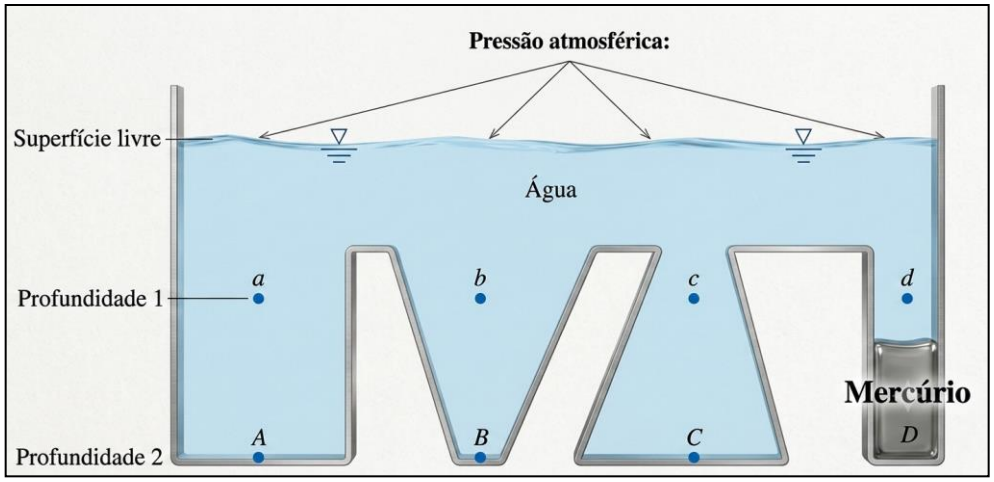
No sistema de coordenadas usual, **z** é "para cima" (figura ao lado). Neste caso, as componentes em **x** e **y** se anulam, visto que a gravidade só atua na direção vertical, sobrando apenas a componente em **z**. Logo:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g$$

A pressão em um fluido estático varia somente com a direção vertical e independe da forma do recipiente. Ela é a mesma em todos os pontos em um dado plano horizontal e no interior do mesmo fluido e aumenta com a profundidade no fluido.

Ilustração - Vasos Comunicantes: **A superfície livre do recipiente é atmosférica e forma um plano horizontal.**



As pressões nos pontos *a*, *b*, *c* e *d* são iguais, pois estão em profundidades iguais na água;

As pressões nos pontos *A*, *B* e *C* são iguais, pois estão em profundidades iguais na água, e maiores do que nos pontos *a*, *b*, *c* e *d*;

O ponto D tem uma pressão maior do que em A, B e C, porque, apesar de estarem na mesma profundidade, ele está no interior do mercúrio, que é treze vezes mais denso do que a água.

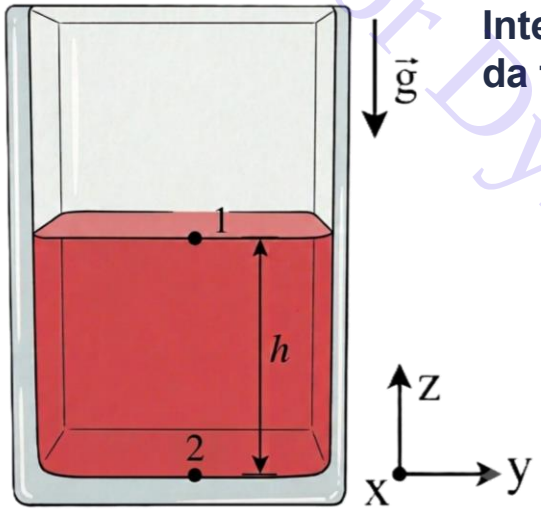
Professor Dyrney Araújo dos Santos

Professor Dyrney Araújo dos Santos
Universidade Federal de Goiás
Curso de Engenharia Química
site: www.dyrney.com

3. Estática dos Fluidos

3.2 Distribuição de Pressão Hidrostática

A) Pressão hidrostática nos líquidos



Integrando a equação da hidrostática entre os pontos 1 e 2 da figura ao lado, tem-se:

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g \longrightarrow \int_{p_1}^{p_2} dp = -\int_{z_1}^{z_2} \rho g dz$$

$$p_2 - p_1 = -\int_{z_1}^{z_2} \rho g dz$$

Para resolver a integração acima é necessário saber como a massa específica varia com z. Assumindo que a massa específica dos líquidos é constante nos cálculos em hidrostática, tem-se:

$$\boxed{p_2 - p_1 = \rho g h} \quad \textbf{ou} \quad \boxed{p_2 = p_1 + \rho g h}$$

OBS.: Logo, a pressão no ponto 2 é igual a pressão mais externa agindo sobre a superfície do fluido (pressão atmosférica) mais a pressão hidrostática, devido à coluna de fluido sobre o ponto 2

OBS.: ρ×g é conhecido como peso específico do fluido, comumente representado pela letra grega γ

Professor Dyrney Araújo dos Santos

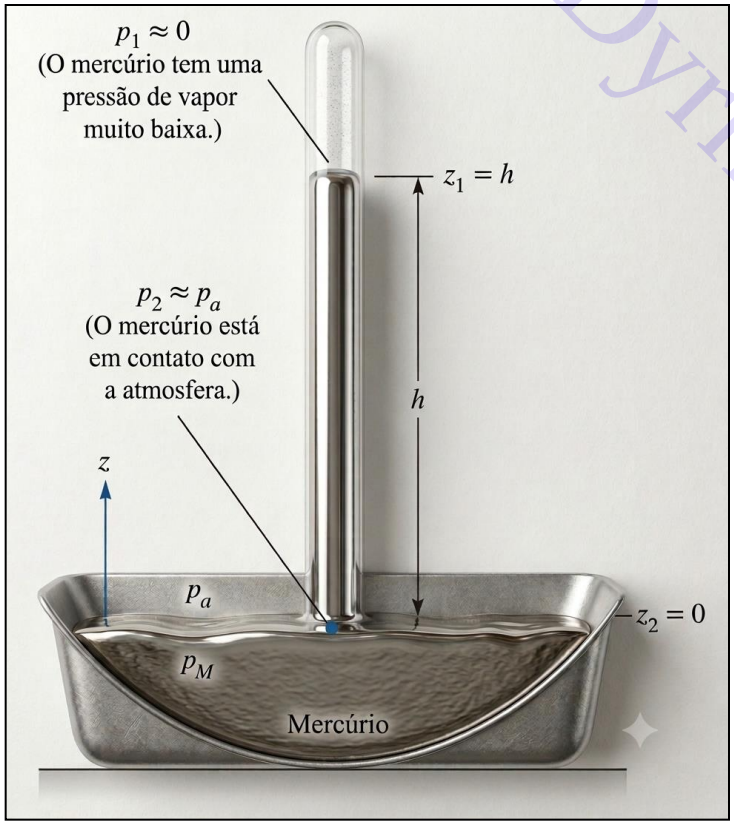
Professor Dyrney Araújo dos Santos
Universidade Federal de Goiás
Curso de Engenharia Química
site: www.dyrney.com

3. Estática dos Fluidos

3.2 Distribuição de Pressão Hidrostática

A) Pressão hidrostática nos líquidos

Barômetro de mercúrio: instrumento utilizado para a medida da pressão atmosférica local, composto por um tubo cheio de mercúrio invertido quando submerso em um reservatório.



Na extremidade fechada há a formação de vácuo visto que o mercúrio tem uma pressão de vapor extremamente pequena à temperatura ambiente.

Aplicando a equação anterior com $p_1 = 0$ (vácuo) em $z_1 = h$ e $p_2 \approx p_a$ (mesmo nível) em $z_2 = 0$, tem-se:

$$p_a - 0 = -\rho_M g\left(0 - h\right) \longrightarrow \boxed{p_a = \rho_M g h}$$

De outra forma, pode-se encontrar h para uma pressão ambiente conhecida:

$$\boxed{h = \frac{p_a}{\rho_M g}}$$

Logo, pela equação acima, ao nível do mar, com $p_a = 1{,}014 \times 10^5$ Pa, $\rho_M = 13600$ kg.m^{-3} e $g = 9{,}81$ m.s^{-2}, a altura barométrica é h = 0,760 m ou 760 mm de mercúrio. Isto equivale à conversão de unidades: 1 atm = 760 mmHg. Qual seria o tamanho necessário da coluna caso o mercúrio fosse substituído pela água?

Professor Dyrney Araújo dos Santos

Professor Dyrney Araújo dos Santos
Universidade Federal de Goiás
Curso de Engenharia Química
site: www.dyrney.com

3. Estática dos Fluidos

3.2 Distribuição de Pressão Hidrostática

B) Pressão hidrostática nos gases

No caso dos gases, a massa específica varia com a pressão e, consequentemente, com a posição z. Logo, não pode ser retirada da integral na equação da hidrostática

Considerando que o gás se comporte como um gás ideal, tem-se:

$$pV = nRT \longrightarrow p = \frac{mRT}{VM} = \rho\frac{RT}{M} \longrightarrow \rho = \frac{pM}{RT}$$

Substituindo na equação da hidrostática e integrando, tem-se:

$$\frac{dp}{p} = -\frac{Mg}{RT}dz \longrightarrow \int_{p_1}^{p_2}\frac{dp}{p} = -\int_{z_1}^{z_2}\frac{Mg}{RT}dz$$

Considerando um sistema isotérmico, a integração produz:

$$p_2 = p_1 \exp\left[-\frac{Mg}{RT}\left(z_2 - z_1\right)\right]$$

Professor Dyrney Araújo dos Santos

Professor Dyrney Araújo dos Santos
Universidade Federal de Goiás
Curso de Engenharia Química
site: www.dyrney.com

3. Estática dos Fluidos

3.3 Aplicação à Manometria

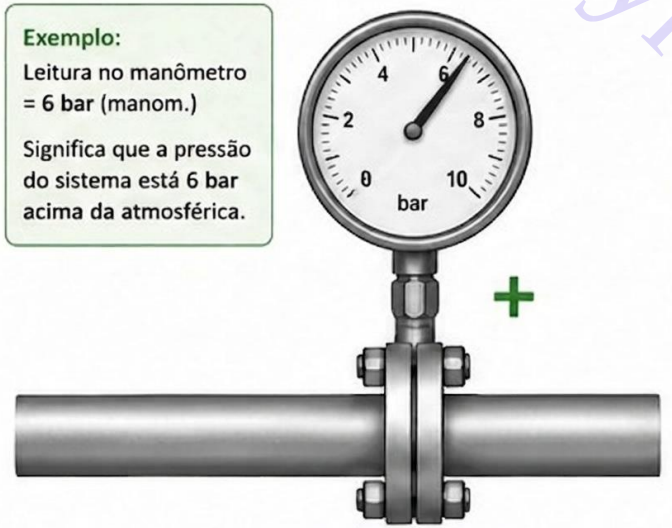
Manometria: área que estuda as técnicas de medida de pressão por meio de instrumentos denominados de manômetros. Segue abaixo a diferença entre a Pressão Absoluta (P_{abs}), a Pressão Manométrica (P_{man}) e a Pressão Vacuométrica (P_{vac})

1) PRESSÃO MANOMÉTRICA (P_{man})

É a pressão medida acima da pressão atmosférica.

Exemplo:
Leitura no manômetro = 6 bar (manom.)

Significa que a pressão do sistema está 6 bar acima da atmosférica.



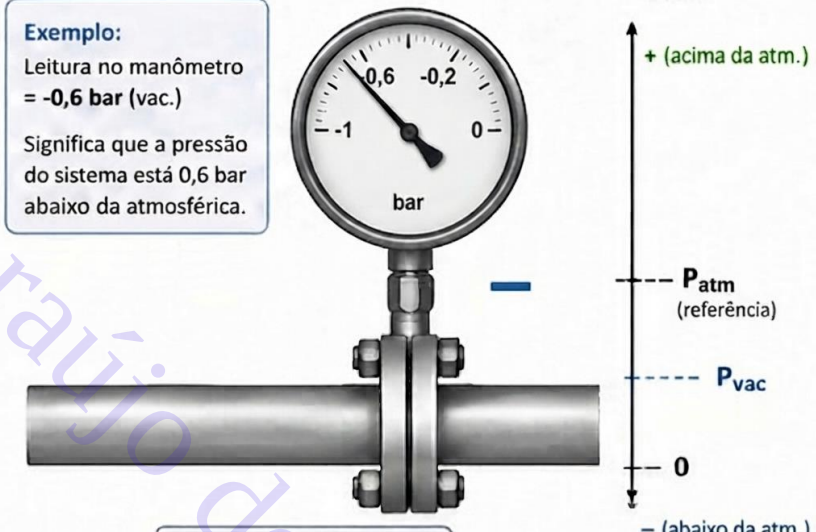
Relação:
$P_{man} = P_{abs} - P_{atm}$

2) PRESSÃO VACUOMÉTRICA (P_{vac})

É a pressão medida abaixo da pressão atmosférica (vácuo).

Exemplo:
Leitura no manômetro = **-0,6 bar** (vac.)

Significa que a pressão do sistema está 0,6 bar abaixo da atmosférica.



Relação:
$P_{vac} = P_{atm} - P_{abs}$
(valor negativo)

OBS.:

1) O instrumento conectado à tubulação é denominado de manômetro de Bourdon e sempre mede a pressão com relação à pressão atmosférica local (iremos ver este instrumento adiante).

2) Já a pressão absoluta (P_{abs}) mede a pressão com relação ao vácuo absoluto.

Professor Dyrney Araújo dos Santos

Professor Dyrney Araújo dos Santos
Universidade Federal de Goiás
Curso de Engenharia Química
site: www.dyrney.com

3. Estática dos Fluidos

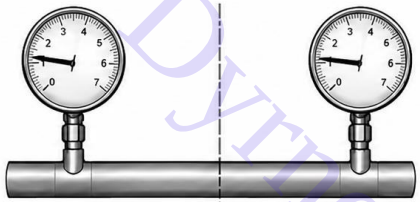
3.3 Aplicação à Manometria

Manometria: área que estuda as técnicas de medida de pressão por meio de instrumentos denominados de manômetros.

A PRESSÃO MANOMÉTRICA É A MESMA NO MESMO SISTEMA EM LUGARES DIFERENTES (EX.: BRASIL E BOLÍVIA)?



Brasil
$P_{atm} \approx 1{,}013$ bar
(ao nível do mar)



Bolívia
$P_{atm} \approx 0{,}832$ bar
(ao nível do mar)



Não.
Se o sistema estiver nas mesmas condições (mesma pressão absoluta interna), a pressão manométrica será **diferente**, pois depende da pressão atmosférica local.

Exemplo: Se P_{abs} = 2,013 bar (abs) em ambos os lugares:

- No Brasil: $P_{man} = 2{,}013 - 1{,}013 = 1{,}000$ bar
- Na Bolívia: $P_{man} = 2{,}013 - 0{,}832 = 1{,}181$ bar

Conclusão:
P_{man} **NÃO** é a mesma.



E A PRESSÃO ABSOLUTA, SERIA A MESMA?

Sim.
A pressão absoluta independe do local (Brasil, Bolívia ou qualquer lugar), pois é referida ao vácuo absoluto.
Se a pressão absoluta do sistema é 2,013 bar (abs), ela será 2,013 bar (abs) em qualquer lugar da Terra.

Importante:
A pressão atmosférica muda com:
- Altitude
- Condições climáticas
- Local geográfico

→ Por isso, manômetros (manométricos ou vacuométricos) sempre dependem do valor da P_{atm} local.

CONCLUSÃO GERAL:

As pressões manométrica e vacuométrica dependem da pressão atmosférica local, enquanto que a pressão absoluta é universal (referida ao vácuo absoluto)

Professor Dyrney Araújo dos Santos

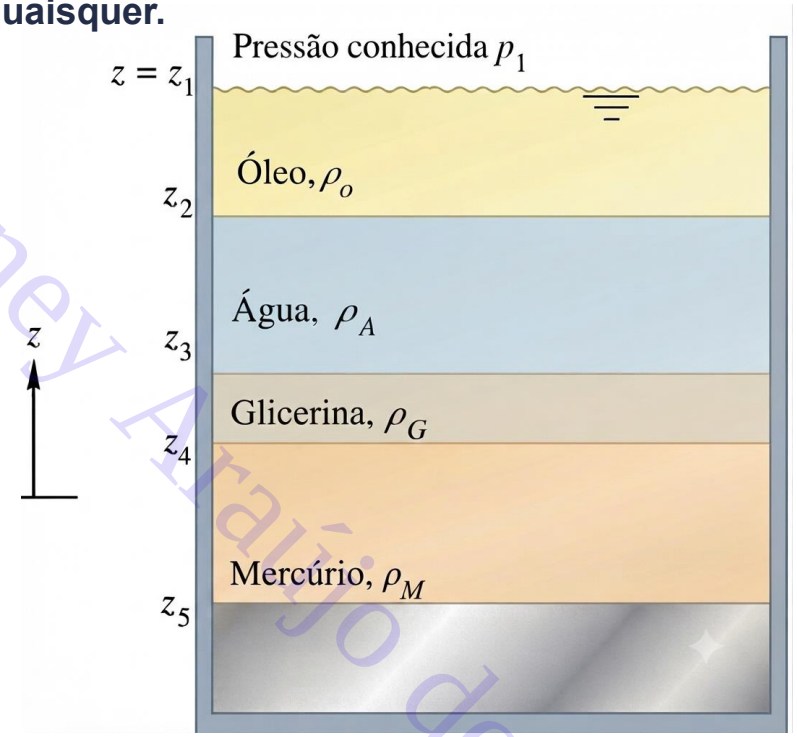
Professor Dyrney Araújo dos Santos
Universidade Federal de Goiás
Curso de Engenharia Química
site: www.dyrney.com

3. Estática dos Fluidos

3.3 Aplicação à Manometria

Aplicação: uma coluna estática de um ou mais líquidos ou gases pode ser usada para medir diferenças de pressão entre dois pontos quaisquer.

Ex: coluna de múltiplos fluidos



A variação de pressão em cada fluido pode ser calculada separadamente ou de uma forma global, somando as contribuições de cada coluna de fluido.

A variação total (p_5 - p_1) é calculada somando-se as sucessivas variações (p_2-p_1, p_3-p_2, p_4-p_3 e p_5-p_4)

Logo, tem-se:

$$p_5 - p_1 = -\rho_0 g\left(z_2 - z_1\right) - \rho_A g\left(z_3 - z_2\right) - \rho_G g\left(z_4 - z_3\right) - \rho_M g\left(z_5 - z_4\right)$$

ou,

$$p_5 = p_1 + \rho_0 g\left(z_1 - z_2\right) + \rho_A g\left(z_2 - z_3\right) + \rho_G g\left(z_3 - z_4\right) + \rho_M g\left(z_4 - z_5\right)$$

Logo, a pressão na base do fluido mercúrio ($z = z_5$) é igual à pressão na superfície em $z = z_1$ mais o somatório das pressões devido às colunas de fluido.

Professor Dyrney Araújo dos Santos

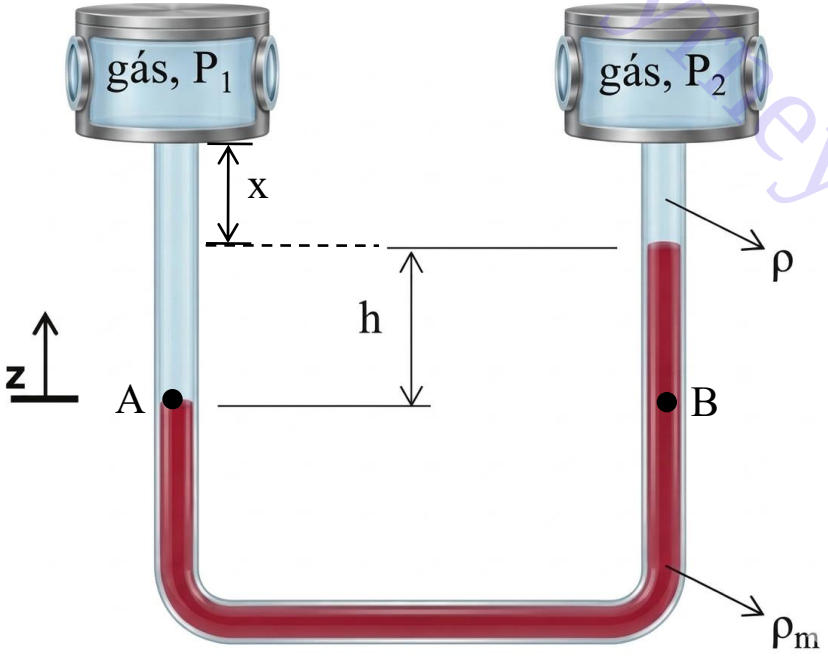
Professor Dyrney Araújo dos Santos
Universidade Federal de Goiás
Curso de Engenharia Química
site: www.dyrney.com

3. Estática dos Fluidos

3.3 Aplicação à Manometria

Há inúmeros meios para se medir uma pressão ou uma diferença de pressão de um determinado sistema. Dentre eles, os mais comuns são:

A) Manômetros do Tipo Tubo em U: consiste num tubo preenchido parcialmente por um líquido, cujas extremidades são conectadas às fontes de pressão.



Da hidrostática, tem-se:

$$p_A = p_B \quad \text{sendo} \quad \begin{cases} p_A = p_1 + \rho g\left(x+h\right) \\ p_B = p_2 + \rho g x + \rho_m g h \end{cases}$$

Logo,

$$p_1 + \rho g\left(x+h\right) = p_2 + \rho g x + \rho_m g h$$

$$p_1 + \rho g x + \rho g h = p_2 + \rho g x + \rho_m g h$$

$$\boxed{p_1 - p_2 = g h\left(\rho_m - \rho\right)}$$

O manômetro acima está medindo apenas uma diferença de pressão (pressão relativa). Neste caso, não é possível conhecer os valores absolutos de P_1 e P_2 mas tão somente a diferença que existe entre eles.

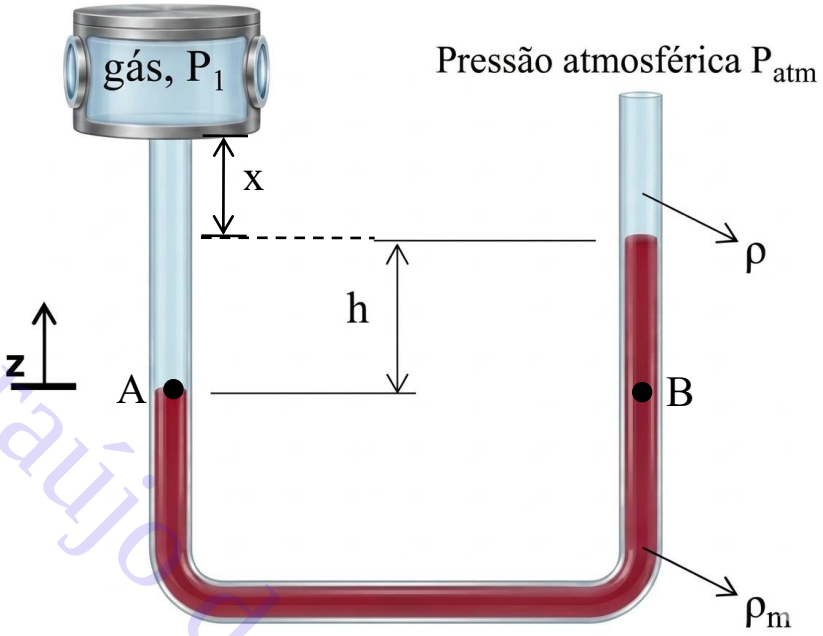
Professor Dyrney Araújo dos Santos

Professor Dyrney Araújo dos Santos
Universidade Federal de Goiás
Curso de Engenharia Química
site: www.dyrney.com

3. Estática dos Fluidos

3.3 Aplicação à Manometria

Para se medir o valor da pressão absoluta de um reservatório de gás, o Manômetro do tipo Tubo em U deve ser instalado conforme abaixo (extremidade aberta para a atmosfera):



Logo, aplicando-se o mesmo procedimento anterior, tem-se:

$$p = p_{atm} + gh(\rho_m - \rho)$$

pressão absoluta

pressão manométrica

Comentários adicionais:

1) fixando-se (p_1-p_2) ou (p-p_{atm}), quanto maior for (ρ_m- ρ), menor será h (menor precisão na medida);

2) o fluido manométrico deve ser escolhido de forma a fornecer valores de h que favoreçam a precisão da medida;

3) para aumentar a precisão da medida, no caso de baixos valores de h, às vezes utiliza-se um Manômetro de Tubo em U Inclinado, como será mostrado a seguir.

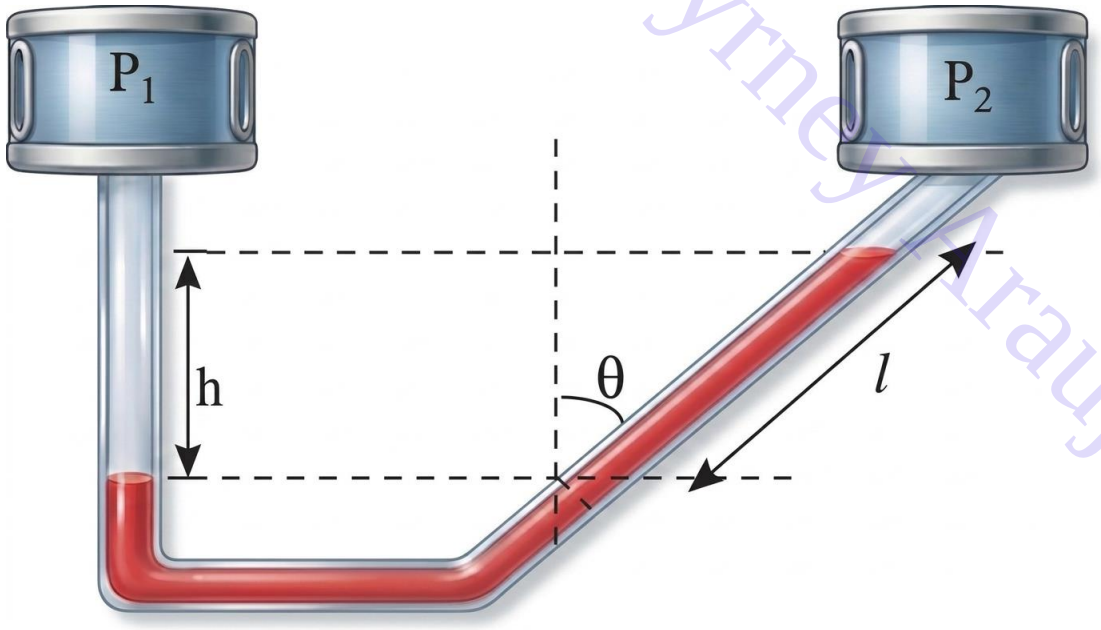
Professor Dyrney Araújo dos Santos

Professor Dyrney Araújo dos Santos
Universidade Federal de Goiás
Curso de Engenharia Química
site: www.dyrney.com

3. Estática dos Fluidos

3.3 Aplicação à Manometria

B) Manômetros do Tipo Tubo em U Inclinado: similar ao anterior, porém com um dos lados inclinado em um ângulo θ



Foi mostrado que, para o manômetro em U, tem-se:

$$p_1 - p_2 = gh(\rho_m - \rho)$$

Da figura ao lado, conclui-se que

$$h = l\cos(\theta)$$

Logo, para o tubo inclinado, tem-se:

$$p_1 - p_2 = gl\cos(\theta)(\rho_m - \rho)$$

Conhecido o ângulo θ, obtém-se uma medida mais precisa da diferença de pressão, uma vez que o comprimento *l* é maior do que a altura h.

Professor Dyrney Araújo dos Santos

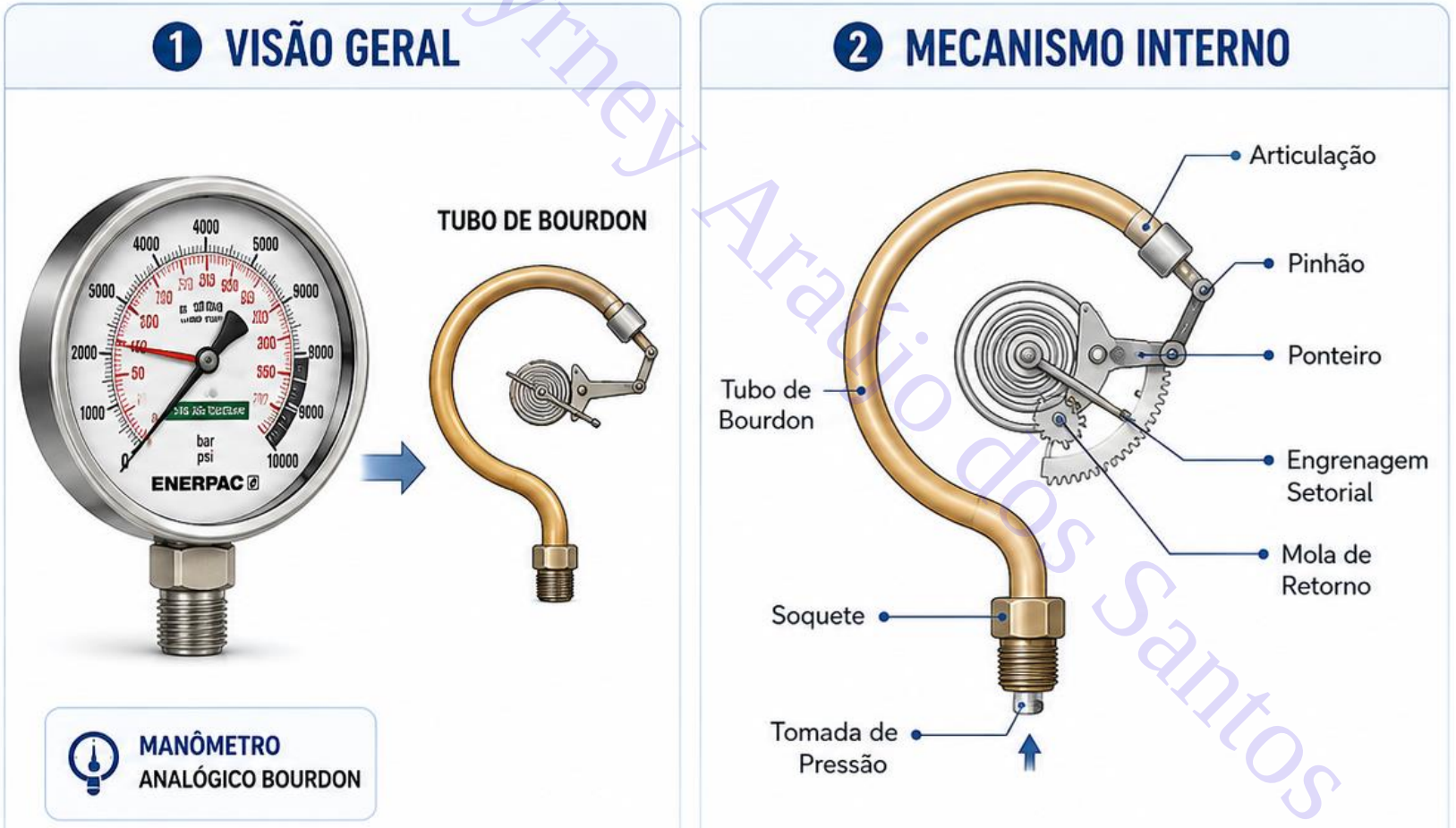
Professor Dyrney Araújo dos Santos
Universidade Federal de Goiás
Curso de Engenharia Química
site: www.dyrney.com

3. Estática dos Fluidos

3.3 Aplicação à Manometria

C) Manômetro de Bourdon: analógico ou digital, são utilizados para medir a pressão manométrica do sistema no qual está inserido, ou seja, mede a pressão em relação à pressão ambiente em que o envolve.

Princípio de funcionamento: Conforme há a variação da pressão, a espiral abre ou fecha produzindo uma deflexão no ponteiro do mostrador proporcional à diferença entre a pressão que está sendo medida e a pressão ambiente a que o manômetro está submetido.



Professor Dyrney Araújo dos Santos

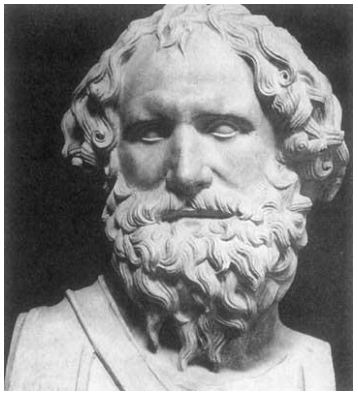
Professor Dyrney Araújo dos Santos
Universidade Federal de Goiás
Curso de Engenharia Química
site: www.dyrney.com

3. Estática dos Fluidos

3.5 Força de Empuxo

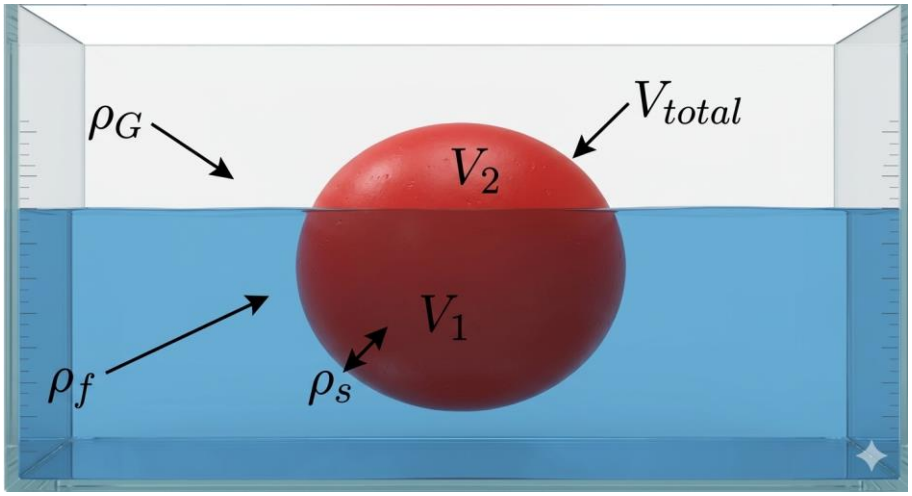
Os mesmos princípios usados no cálculo das forças hidrostáticas podem ser aplicados para calcular a força líquida de pressão sobre um corpo completamente submerso ou flutuante

Lei do empuxo de Arquimedes: Um corpo imerso em um fluido está sujeito a uma força de empuxo vertical igual ao peso do fluido que ele desloca



Arquimedes de Siracusa
(287 a.C. – 212 a.C.)
(Matemático, filósofo, engenheiro, inventor e astrônomo grego)

Considere um determinado corpo sólido parcialmente imerso num líquido e em equilíbrio
(resultante das forças que atua sobre ele é nula)



$$\vec{F}_{peso} + \vec{F}_{atmosfera} = \vec{F}_{empuxo}$$

$$\int_0^V \rho_S g dV + \int_0^{V_2} \nabla P_2 dV = \int_0^{V_1} \nabla P_1 dV$$

sendo : $V = V_1 + V_2$

Professor Dyrney Araújo dos Santos

Professor Dyrney Araújo dos Santos
Universidade Federal de Goiás
Curso de Engenharia Química
site: www.dyrney.com

3. Estática dos Fluidos

3.5 Força de Empuxo

Visto que:

$$\begin{cases} \nabla P_1 = \rho_f g \\ \nabla P_2 = \rho_G g \end{cases} \Rightarrow \int_0^V \rho_S g dV + \int_0^{V-V_1} \rho_G g dV = \int_0^{V_1} \rho_f g dV$$

Logo,

$$\rho_S g V + \rho_G g (V - V_1) = \rho_f g V_1 \xrightarrow{\text{rearranjando}} \frac{V_1}{V} = \frac{(\rho_G + \rho_S)}{(\rho_G + \rho_f)}$$

Como $\rho_G <<< \rho_f$ e $\rho_G <<< \rho_S$, podemos, finalmente, escrever

$$\frac{V_1}{V} = \frac{\rho_S}{\rho_f}$$

Logo, poderá ocorrer as seguintes situações:

I – Se $\rho_S < \rho_f$, o corpo ficará parcialmente submerso;

II – Se $\rho_S = \rho_f$, o corpo ficará suspenso no líquido;

III – Se $\rho_S > \rho_f$, o corpo afundará.

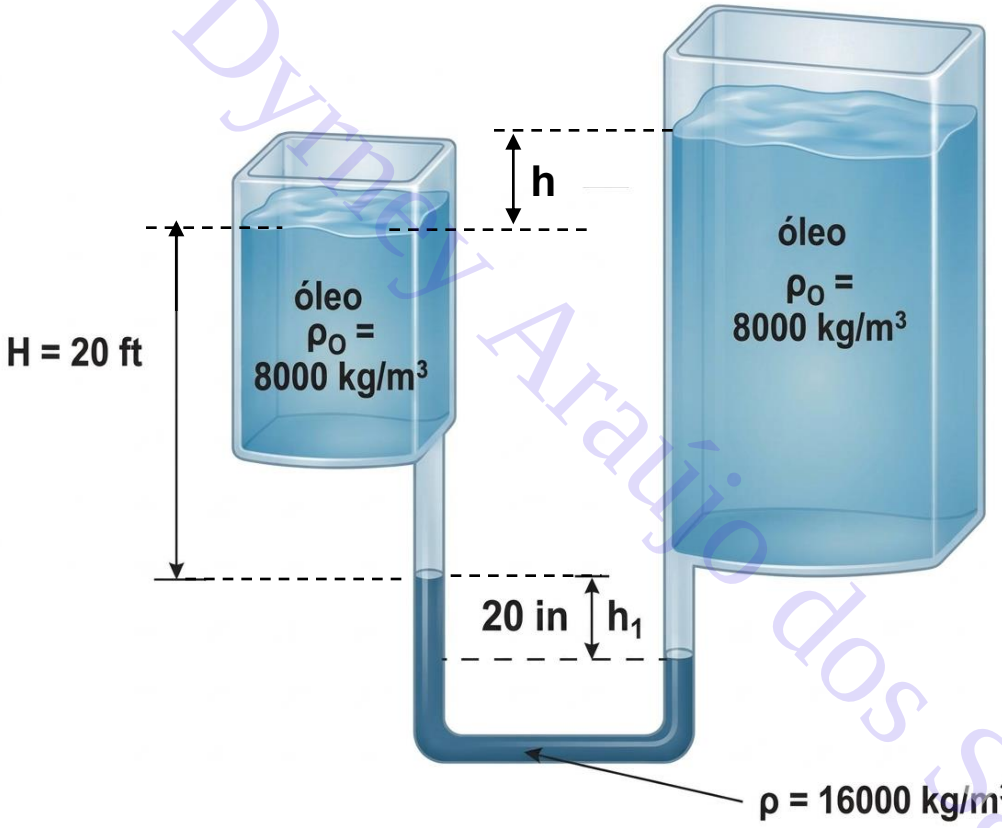


Professor Dyrney Araújo dos Santos

Professor Dyrney Araújo dos Santos
Universidade Federal de Goiás
Curso de Engenharia Química
site: www.dyrney.com

3. Estática dos Fluidos

Exercício Proposto 5: **Com base no sistema ilustrado abaixo, encontre o valor da altura h (diferença de altura entre as superfícies dos fluidos presentes nos tanques).**

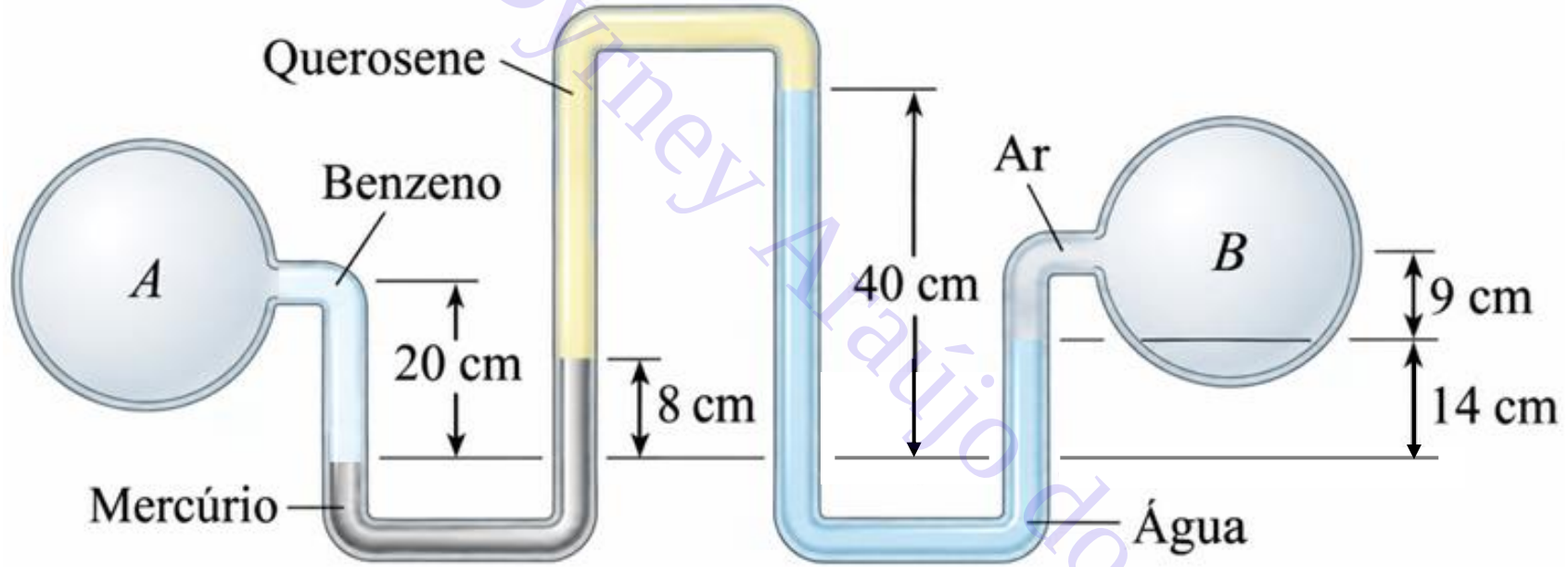


Professor Dyrney Araújo dos Santos

Professor Dyrney Araújo dos Santos
Universidade Federal de Goiás
Curso de Engenharia Química
site: www.dyrney.com

3. Estática dos Fluidos

Exercício Proposto 6: Determine a diferença de pressão (Pa) entre os pontos ***A*** e ***B***. Considere as massas específicas da água, benzeno, querosene, mercúrio e ar iguais a **979 kg/m^3**, **864 kg/m^3**, **788,5 kg/m^3**, **13310 kg/m^3** e **1,2 kg/m^3**, respectivamente.



Professor Dyrney Araújo dos Santos

Professor Dyrney Araújo dos Santos
Universidade Federal de Goiás
Engenharia Química
site: www.dyrney.com

Bibliografia

BIRD, R.B.; STEWART, W.E. e; LIGHTFOOT, E.N. Fenômenos de transporte, 2ª ed., LTC, 2004.

ÇENGEL, Y.A e CIMBALA, J.M.; Mecânica dos fluidos, McGraw Hill, 3ª edição, 2015.

WHITE, F. M. Mecânica dos Fluidos. 6ª edição. MCGRAW-HILL, 2011.

Professor Dyrney Araújo dos Santos