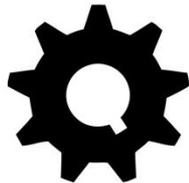




**UFG**  
UNIVERSIDADE  
FEDERAL DE GOIÁS

**Instituto de Química**

**IQ - UFG**



**ENGENHARIA QUÍMICA**

Universidade Federal de Goiás

# Equações da Conservação da Massa e Quantidade de Movimento

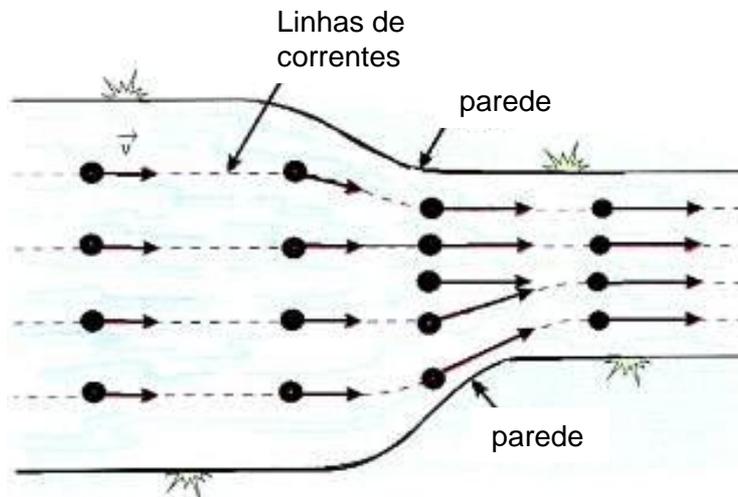
Professor Dyrney Araújo dos Santos  
Universidade Federal de Goiás  
Curso de Engenharia Química  
Disciplina: Fenômenos de Transporte 1  
site: [www.dyrney.com](http://www.dyrney.com)

# 4. Conservação da Massa e Momento

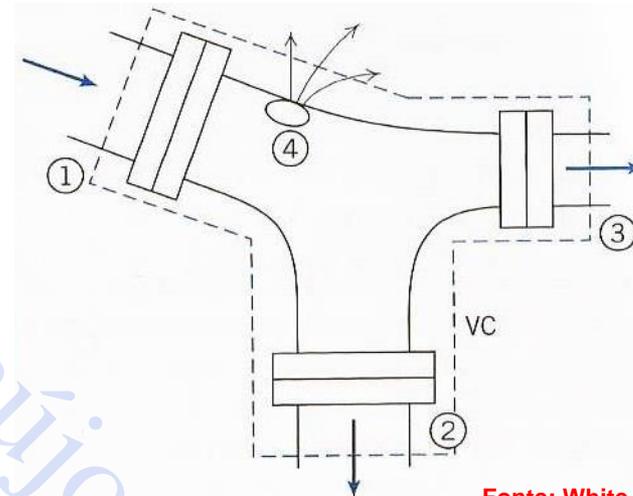
## 4.1 Abordagens Integral e Diferencial para um Volume de Controle

Na análise do movimento dos fluidos, podemos seguir um dos dois caminhos

**Abordagem Integral:** delimita uma região finita no espaço fazendo um balanço integral dos escoamentos que entram e saem e determinando os efeitos globais, tais como a **vazão volumétrica** ou **mássica**, a **temperatura média**, a **velocidade média**, etc.;



Fonte: White (2011)



Fonte: White (2011)

**Abordagem Diferencial:** procura descrever os detalhes ponto a ponto da variação espacial ( $x$ ,  $y$ ,  $z$ ) de uma propriedade do escoamento (**distribuições de velocidade, de pressão, de temperatura, etc.**), ao longo do tempo ( $t$ ), analisando regiões infinitesimais dentro deste escoamento .

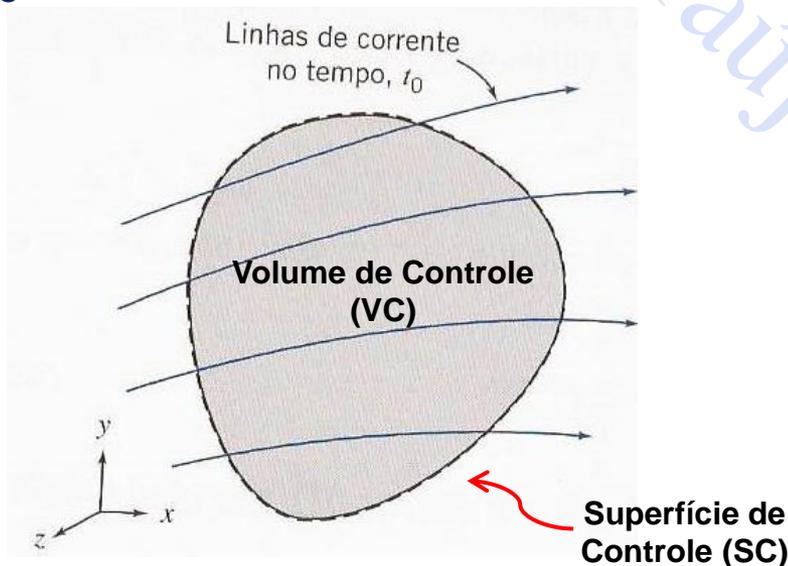
# 4. Conservação da Massa e Momento

## 4.2 A Equação Integral da Conservação da Massa

**OBS.1:** A abordagem integral pode ser aplicada, tanto para a massa, quanto para a energia e a quantidade de movimento. Neste curso, iremos, como exemplo, nos ater apenas à formulação integral aplicada à massa. Já a formulação diferencial (próximos tópicos), será aplicada para a massa e para a quantidade de movimento linear.

**Exemplo:** Aplicação do balanço integral na conservação da massa

A abordagem Integral envolve a aplicação do conceito de Volume de Controle, mostrado na figura abaixo



**Volume de Controle (VC):** utilizado em mecânica dos fluidos que permite estudar uma região do espaço conforme o fluido escoar através dela. Um volume de controle é delimitado por uma superfície de controle (SC)

Fonte: White (2011)

# 4. Conservação da Massa e Momento

## 4.2 A Equação Integral da Conservação da Massa

Exemplo: Aplicação do balanço integral na conservação da massa

Para a aplicação da abordagem integral à massa, considere a lei de conservação da massa aplicada a um volume de controle, dada por:

$$(\text{taxa de variação da massa})_{\text{vc}} = \text{taxa mássica que entra}|_{\text{sc}} - \text{taxa mássica que sai}|_{\text{sc}}$$

A variação da massa total pode ser dada pela integração da variação infinitesimal da massa de fluido (**por unidade de volume**) sobre um volume de controle qualquer (genérico)

$$(\text{taxa de variação da massa})_{\text{vc}} = \int_{\text{vc}} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$$

sendo  $\rho$  e  $V$  a massa específica do fluido e o volume considerado, respectivamente.

# 4. Conservação da Massa e Momento

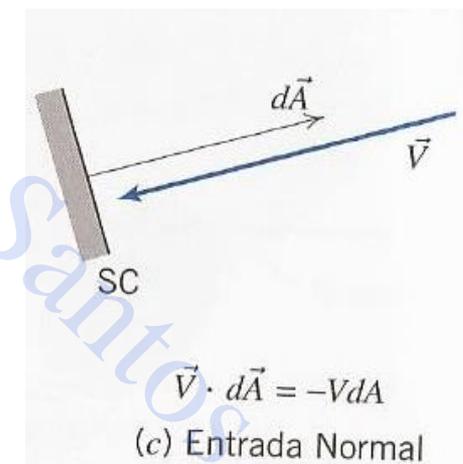
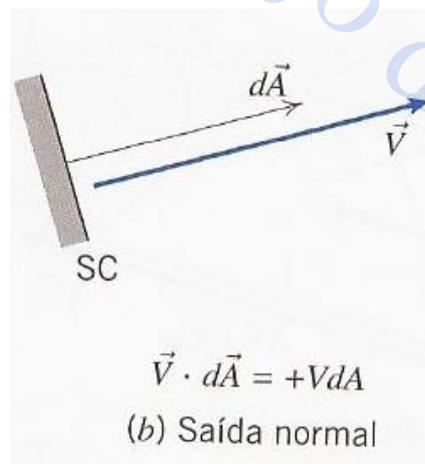
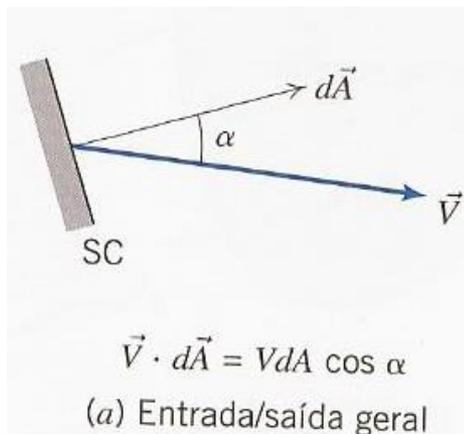
## 4.2 A Equação Integral da Conservação da Massa

**Exemplo:** Aplicação do balanço integral na conservação da massa

As entradas e saídas de massa do volume de controle, pelas superfícies de controle, podem ser analisadas pela seguinte integral, sendo  $\vec{v}$  o vetor velocidade e  $d\vec{A}$  o vetor de área normal à **SC**

$$\text{taxa mássica que entra}|_{SC} - \text{taxa mássica que sai}|_{SC} = - \int_{SC} \rho \vec{v} \cdot d\vec{A}$$

A caracterização das correntes de entrada e saída do volume de controle é feita conforme a convenção dos sinais abaixo



# 4. Conservação da Massa e Momento

## 4.2 A Equação Integral da Conservação da Massa

**Exemplo:** Aplicação do balanço integral na conservação da massa

Substituindo estes termos na lei de conservação da massa, tem-se:

(taxa de variação da massa)<sub>VC</sub> = taxa mássica que entra<sub>SC</sub> – taxa mássica que sai<sub>SC</sub>

$$\int_{VC} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \int_{SC} \rho \vec{v} \cdot d\vec{A}$$

Esta equação é também conhecida como Equação da Continuidade.

**OBS.2:** Para um determinado número de entradas e saídas, considerando velocidades médias, de um volume de controle, pode-se escrever:

$$\int_{VC} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = \sum_i (\rho_i A_i v_i)_{entra} - \sum_i (\rho_i A_i v_i)_{sai}$$

ou,

$$\int_{VC} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = \sum_i (\dot{m}_i)_{entra} - \sum_i (\dot{m}_i)_{sai}$$

sendo:  $\dot{m}$  a vazão mássica de escoamento do fluido (kg/s no S.I.)

# 4. Conservação da Massa e Momento

## 4.2 A Equação Integral da Conservação da Massa

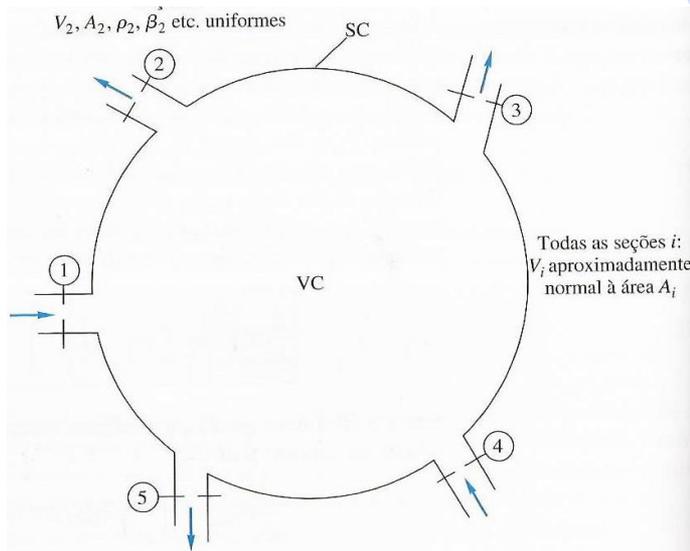
**Exemplo:** Aplicação do balanço integral na conservação da massa

Casos especiais:

- ❑ **Escoamento Permanente (estado estacionário):** Neste caso, o termo de acúmulo é nulo, ou seja, não há variação da massa total no interior do volume de controle. Logo,

$$\sum_i (\dot{m}_i)_{entra} = \sum_i (\dot{m}_i)_{sai}$$

**Ex:** Considere os seguinte volume de controle com diferentes entradas e saídas



No caso de regime permanente, tem-se, da figura ao lado:

$$\dot{m}_1 + \dot{m}_4 = \dot{m}_2 + \dot{m}_3 + \dot{m}_5$$

# 4. Conservação da Massa e Momento

## 4.2 A Equação Integral da Conservação da Massa

**Exemplo:** Aplicação do balanço integral na conservação da massa

### Casos especiais:

- **Escoamento Incompressível e Permanente (estado estacionário):** apresenta variações desprezíveis de massa específica e nada mais varia com o tempo. Neste caso, as massas específicas das correntes de entrada são iguais às das saídas. Logo,

$$\sum_i (V_i A_i)_{entra} = \sum_i (V_i A_i)_{sai}$$

ou,

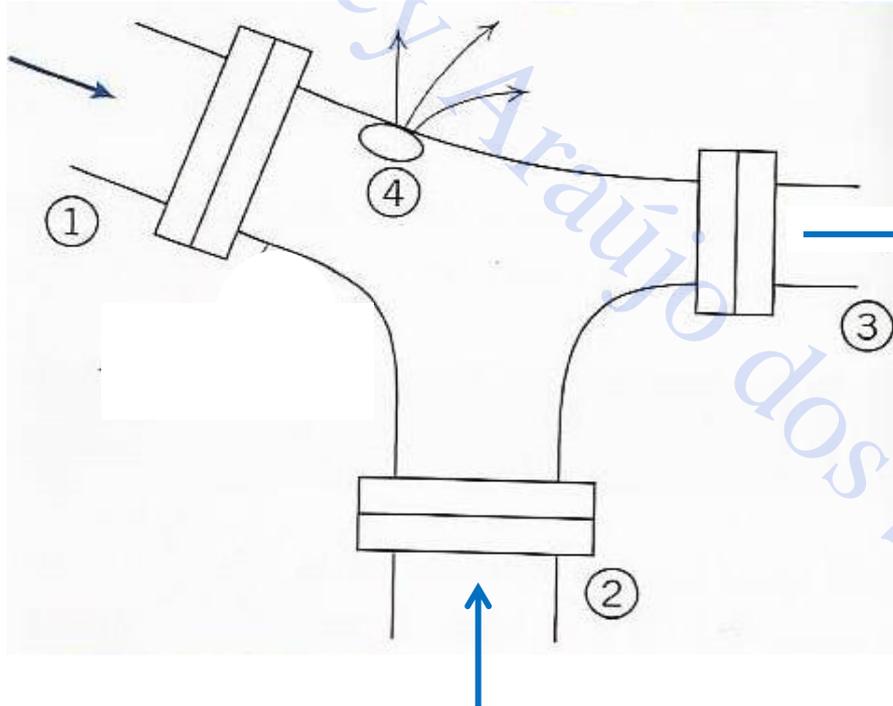
$$\sum_i (\dot{Q}_i)_{entra} = \sum_i (\dot{Q}_i)_{sai}$$

sendo:  $\dot{Q}$  a vazão volumétrica de fluido ( $\text{m}^3/\text{s}$  no S.I.)

**OBS.3:** Note que, para um escoamento compressível e permanente, as **vazões mássicas**, e não as vazões volumétricas, são constantes. As **vazões volumétricas** são constantes, se, e somente se, o escoamento for incompressível ( $Ma < 0,3$ , sendo  $Ma$  o número adimensional de Mach).

# 4. Conservação da Massa e Momento

**Exercício proposto:** Considere o escoamento permanente de água em uma junção de tubos conforme mostrado no diagrama abaixo. As áreas das seções são:  $A_1 = 0,2 \text{ m}^2$ ,  $A_2 = 0,2 \text{ m}^2$  e  $A_3 = 1,61 \text{ ft}^2$ . O fluido também vaza para fora do tubo através de um orifício no ponto (4) com uma vazão volumétrica estimada em  $3,53 \text{ ft}^3/\text{s}$ . As velocidades médias nas seções (1) e (3) são  $V_1 = 197 \text{ in/s}$  e  $V_3 = 12 \text{ m/s}$ , respectivamente. Determine a velocidade do escoamento na seção (2) ( $V_2$ ) em m/s.

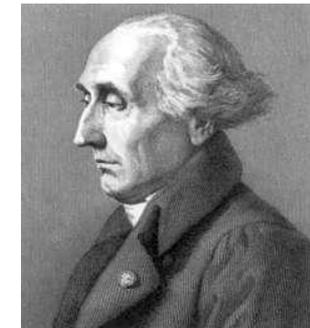
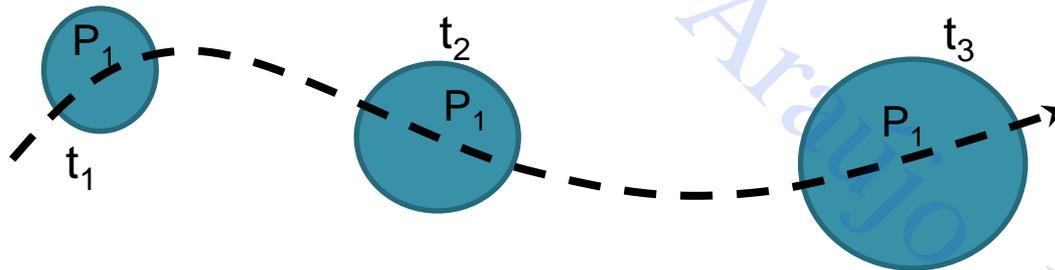


# 4. Conservação da Massa e Momento

## 4.3 Abordagem Diferencial

### Há dois pontos de vista diferentes na abordagem diferencial

**Método Lagrangeano:** Consiste em identificar um determinado sistema de identidade fixa, como por exemplo uma **partícula de fluido**, e, a partir daí, observar variações de propriedades tais como posição, temperatura, velocidade, etc. à medida que este sistema se desloca no espaço com o passar do tempo.



Joseph-Louis Lagrange  
(Giuseppe Lodovico Lagrangia)  
(1736 – 1813)

(Físico, matemático e  
astrônomo italiano)

**OBS. 4:** Este método envolve acompanhar o **vetor posição** e o **vetor velocidade** de cada sistema como funções do tempo.

**OBS. 5:** Este método é normalmente utilizado no estudo da **mecânica dos sólidos** e é inviável de ser aplicado no estudo de escoamento de fluidos (“**elevado número de partículas de fluido**”). Possui um alto custo computacional a depender do número de partículas presentes no domínio de cálculo.

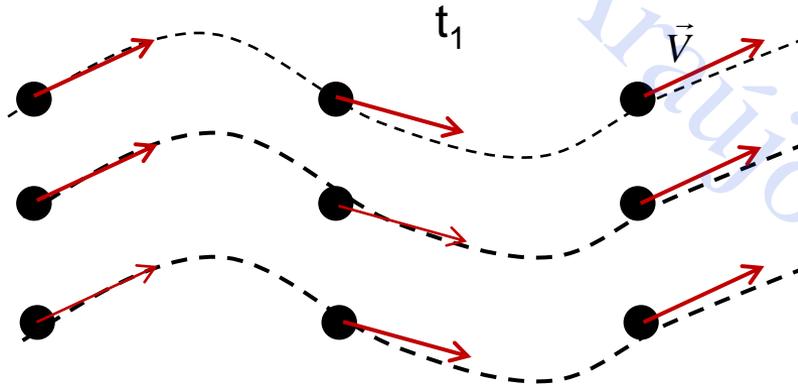
# 4. Conservação da Massa e Momento

## 4.3 Abordagem Diferencial

### Há dois pontos de vista diferentes na abordagem diferencial

**Método Euleriano:** Consiste em observar o comportamento transiente dos sistemas, como por exemplo **partículas de fluido**, em vários “**pontos fixos**” ao longo do espaço (“**volumes de controle infinitesimais**” ou “**elementos de fluido**”), podendo-se, assim, obter uma “visão” do comportamento do movimento naquela região do espaço e naquele instante de tempo.

Ex.: Valores de velocidade em “**pontos fixos no espaço**” em um determinado instante de tempo ( $t_1$ ), ou seja, o campo de velocidade  $V(x,y,z,t)$



Leonhard Paul Euler  
(1707 – 1783)  
(Físico, matemático e  
astrônomo suíço)

**OBS. 6:** Ao invés de acompanhar uma partícula de fluido individual, define-se variáveis de campo (**campo de pressão, de velocidade, etc.**), funções do espaço e do tempo, dentro do **volume de controle infinitesimal** ou **elemento de fluido**. A variável de campo em um determinado local e em um determinado instante de tempo é o valor da variável para qualquer partícula de fluido que ocupar essa posição neste determinado instante.

**OBS. 7:** É a descrição mais conveniente para aplicações da mecânica dos fluidos.

# 4. Conservação da Massa e Momento

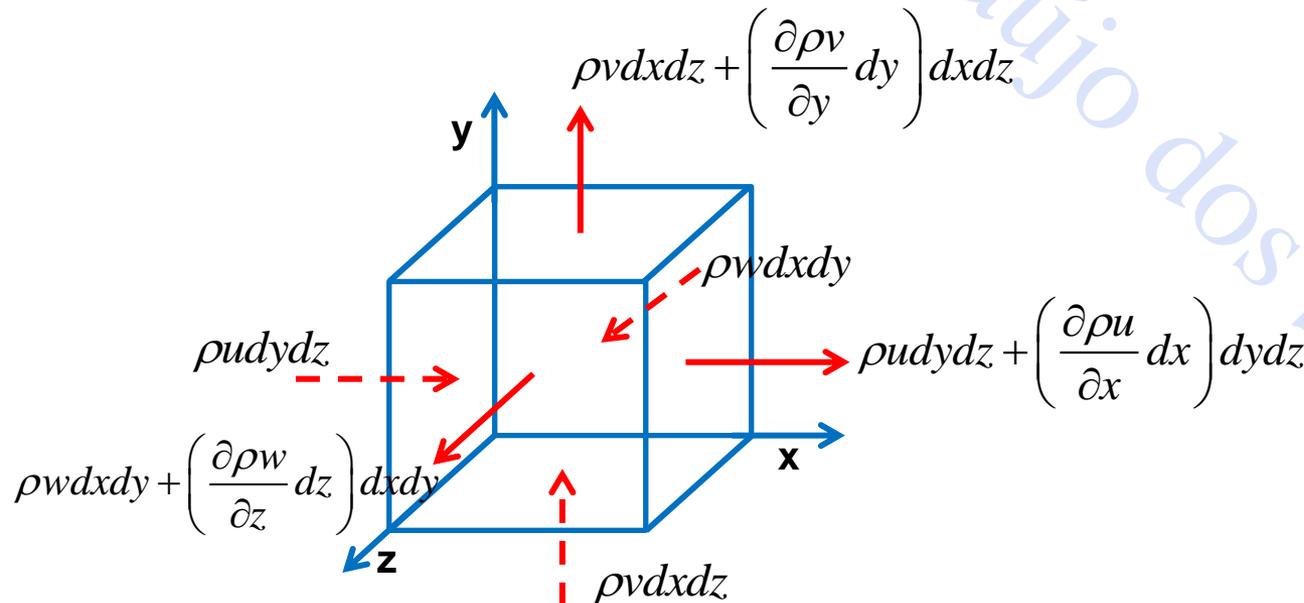
## 4.4 A Equação Diferencial da Conservação da Massa

**Comentário:** a equação da conservação de massa ou equação da continuidade pode ser obtida através de um balanço de massa num volume de controle diferencial ou infinitesimal.

Da lei de conservação da massa, tem-se:

$$\text{Taxa mássica acumulada [MT}^{-1}] = \text{Taxa mássica que entra [MT}^{-1}] - \text{Taxa mássica que sai [MT}^{-1}]$$

**Análise dos termos de entrada e saída:** considere as taxas de massa que transpassam as faces de um volume de controle infinitesimal (**elemento de fluido**). O volume do elemento abaixo é dado por  $dx dy dz$



Sendo o vetor velocidade dado por:

$$\vec{V} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$$

# 4. Conservação da Massa e Momento

## 4.4 A Equação Diferencial da Conservação da Massa

As taxas mássicas de entrada e saída do volume de controle infinitesimal podem ser resumidas na tabela abaixo

Faces	Taxa mássica de entrada [MT <sup>-1</sup> ]	Taxa mássica de saída [MT <sup>-1</sup> ]
x	$\rho u dydz$	$\rho u dydz + \left( \frac{\partial \rho u}{\partial x} dx \right) dydz$
y	$\rho v dx dz$	$\rho v dx dz + \left( \frac{\partial \rho v}{\partial y} dy \right) dx dz$
z	$\rho w dx dy$	$\rho w dx dy + \left( \frac{\partial \rho w}{\partial z} dz \right) dx dy$

**Análise do termo de acúmulo:** a taxa de variação infinitesimal da massa no interior do volume infinitesimal (acúmulo de massa) pode ser definido como

$$\text{Acúmulo} = \frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz$$

# 4. Conservação da Massa e Momento

## 4.4 A Equação Diferencial da Conservação da Massa

- Finalmente, retornando à equação do balanço de massa no **volume de controle infinitesimal**, tem-se:

Taxa mássica acumulada [MT<sup>-1</sup>] = Taxa mássica que entra [MT<sup>-1</sup>] – Taxa mássica que sai [MT<sup>-1</sup>]

Substituindo os respectivos termos , tem-se:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz = \cancel{\rho u dy dz} + \cancel{\rho v dx dz} + \cancel{\rho w dx dy} - \left( \cancel{\rho u dy dz} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} dx dy dz \right) - \left( \cancel{\rho v dx dz} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} dy dx dz \right) - \left( \cancel{\rho w dx dy} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} dz dx dy \right)$$

Após simplificações e dividindo tudo pelo volume infinitesimal **dx dy dz**, tem-se:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0$$

A equação de conservação da massa para um volume infinitesimal é conhecida como **Equação da Continuidade**.

# 4. Conservação da Massa e Momento

## 4.4 A Equação Diferencial da Conservação da Massa

Posto que o operador nabla,  $\nabla$ , em coordenadas retangulares, é dado por:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$$

então

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = \nabla \cdot (\rho \vec{V})$$

Desta forma a equação da continuidade pode, também, ser escrita em uma forma compacta

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0$$

**OBS. 8:** A forma compacta da equação da continuidade é “universal”, visto que independe do sistema de coordenadas adotado, como será visto posteriormente.

# 4. Conservação da Massa e Momento

## 4.4 A Equação Diferencial da Conservação da Massa

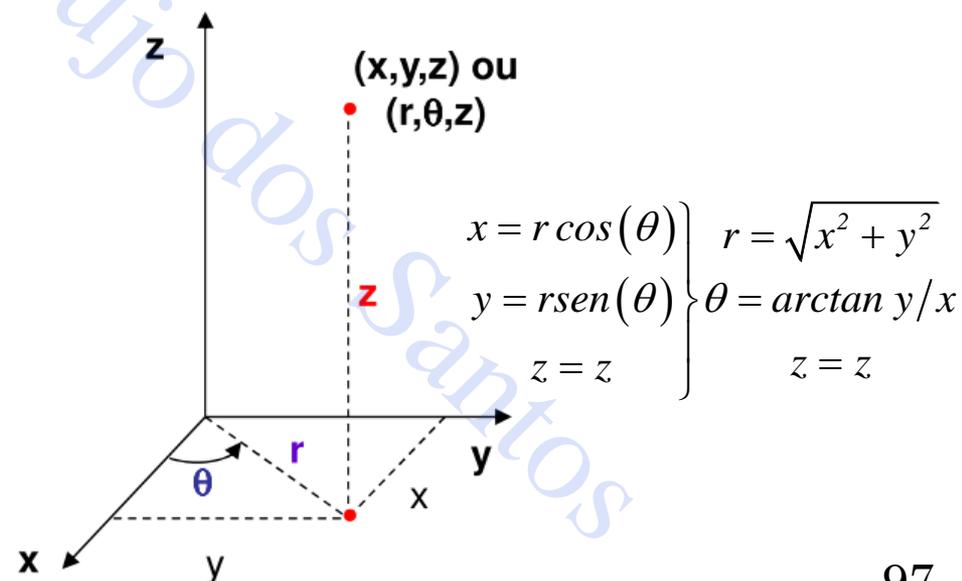
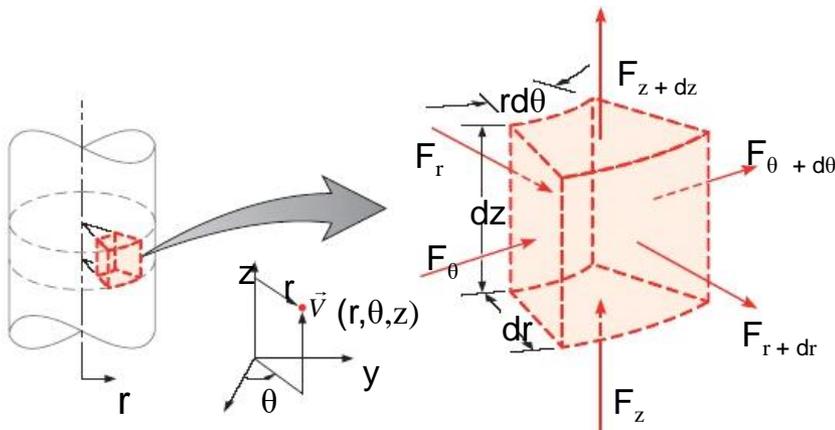
a) Sistema de Coordenadas Cilíndricas: a alternativa mais comum ao sistema cartesiano é o sistema de coordenadas cilíndricas, utilizado, por exemplo, na análise de escoamentos no interior de um tubo de seção circular.

Considere as taxas de massa que transpassam as faces do volume de controle abaixo, cujo volume é dado por  $r d\theta dr dz$

seja " $F$ " a taxa mássica que transpassa as faces do volume infinitesimal

O vetor velocidade é dado por (sendo "e" o vetor unitário):

$$\vec{V} = V_r \vec{e}_r + V_\theta \vec{e}_\theta + V_z \vec{e}_z$$



Fonte (modificado): Incropera e Dewitt (2008)

# 4. Conservação da Massa e Momento

## 4.4 A Equação Diferencial da Conservação da Massa

### a) Sistema de Coordenadas Cilíndricas:

Após a determinação da taxa líquida nas direções  $r$ ,  $\theta$  e  $z$ , e a posterior substituição na lei de conservação da massa, a equação da continuidade (por unidade de volume) em coordenadas cilíndricas torna-se (**para maiores detalhes ver White, 2011**):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho V_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho V_\theta) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho V_z) = 0$$

O operador divergente ( $\nabla \cdot$ ) de um vetor " $\mathbf{A}$ " qualquer, em coordenadas cilíndricas, é dado por:

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\theta) + \frac{\partial}{\partial z} (A_z)$$

Logo, novamente a forma compacta da equação da continuidade torna-se:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0$$

# 4. Conservação da Massa e Momento

## 4.4 A Equação Diferencial da Conservação da Massa

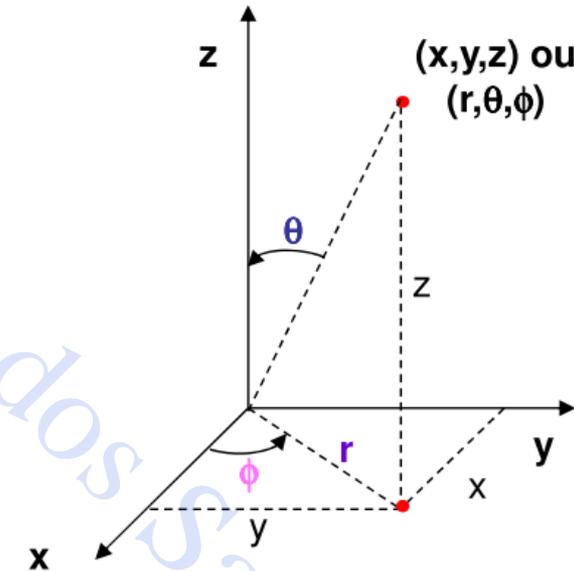
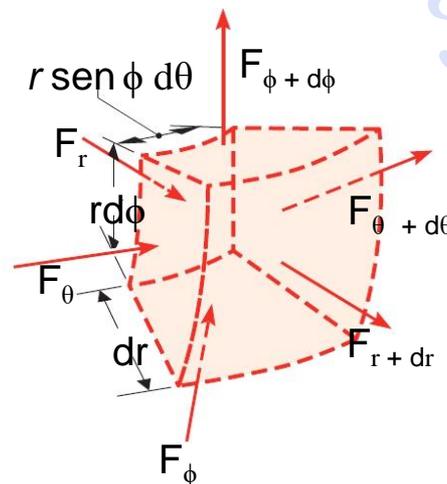
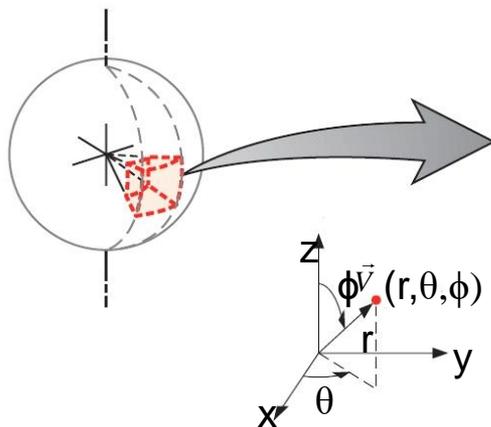
**b) Sistema de Coordenadas Esféricas:** este sistema também é bastante utilizado em alguns problemas de fenômenos de transporte

Considere as taxas de massa que transpassam as faces do volume de controle abaixo, cujo volume é dado por  $dr.r\text{sen}(\phi)d\theta.rd\phi$

seja " $F$ " a taxa mássica que transpassa as faces do volume infinitesimal

O vetor velocidade é dado por (sendo "e" o vetor unitário):

$$\vec{V} = V_r \vec{e}_r + V_\theta \vec{e}_\theta + V_\phi \vec{e}_\phi$$



$$\left. \begin{aligned} x &= r \text{sen}(\theta) \cos(\phi) \\ y &= r \text{sen}(\theta) \text{sen}(\phi) \\ z &= r \cos(\theta) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta &= \arctan\left(\sqrt{x^2 + y^2} / z\right) \\ z &= \arctan y/x \end{aligned}$$

# 4. Conservação da Massa e Momento

## 4.4 A Equação Diferencial da Conservação da Massa

### b) Sistema de Coordenadas Esféricas:

Após a determinação da taxa líquida nas direções  $r$ ,  $\theta$  e  $\phi$ , e a posterior substituição na lei de conservação da massa, a equação da continuidade (por unidade de volume) em coordenadas esféricas torna-se (para maiores detalhes ver White, 2011):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (\rho r^2 V_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho V_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} (\rho V_\phi) = 0$$

O operador divergente ( $\nabla \cdot$ ) de um vetor “ $\vec{A}$ ” qualquer, em coordenadas esféricas, é dado por:

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}$$

A forma compacta da equação da continuidade torna-se, novamente:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0$$

# 4. Conservação da Massa e Momento

## 4.4 A Equação Diferencial da Conservação da Massa

### Casos Especiais da Equação da Continuidade

- **Escoamento Compressível e Regime Permanente:** se o escoamento é permanente,  $\partial/\partial t \equiv 0$ , todas as propriedades são funções apenas da posição

CARTESIANA: 
$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0$$

CILÍNDRICA: 
$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r \rho V_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}(\rho V_\theta) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho V_z) = 0$$

ESFÉRICA: 
$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(\rho r^2 V_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta}(\rho V_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}(\rho V_\phi) = 0$$

# 4. Conservação da Massa e Momento

## 4.4 A Equação Diferencial da Conservação da Massa

### Casos Especiais da Equação da Continuidade

- **Escoamento Incompressível:** as variações de massa específica são desprezíveis ( $Ma < 0,3$ ).

**OBS.9:** neste caso  $\partial\rho/\partial t = 0$  independente se o regime é permanente ou transiente. Eliminando a massa específica do operador divergente, tem-se

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0$$

Logo,

CARTESIANA: 
$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

CILÍNDRICA: 
$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rV_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (V_\theta) + \frac{\partial}{\partial z} (V_z) = 0$$

ESFÉRICA: 
$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 V_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (V_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} (V_\phi) = 0$$

## 4. Conservação da Massa e Momento

**Exercício Proposto:** Sob que condições o campo de velocidade abaixo representa um escoamento incompressível, sendo  $a_1, a_2, a_3, b_1$ , etc. constantes?

$$\vec{V} = (a_1x + b_1y + c_1z)\vec{i} + (a_2x + b_2y + c_2z)\vec{j} + (a_3x + b_3y + c_3z)\vec{k}$$

# 4. Conservação da Massa e Momento

## 4.5 A Equação Diferencial da Quantidade de Movimento Linear

**OBS.10:** A equação diferencial da quantidade de movimento linear, também conhecida como **Equação de Cauchy (August Louis de Cauchy, 1789-1857)** pode ser deduzida de várias formas através do Teorema de Transporte de Reynolds, da Teoria da Divergência de Gauss, da utilização de um volume de controle infinitesimal, etc. (veja **Çengel e Cimbala (2015)** para maiores detalhes).

**OBS.11:** Iremos deduzir, aqui, a Equação da Quantidade de Movimento Linear por meio da aplicação da segunda lei de Newton a uma partícula de fluido

**Segunda Lei de Newton:** esta lei nos diz que a resultante de forças que atua sobre um corpo causa uma variação em sua quantidade de movimento linear. Logo, pode-se escrever:

$$\sum \vec{F} = \frac{d(m\vec{V})}{dt}$$

Pela regra da cadeia, tem-se:

$$\sum \vec{F} = m \frac{d(\vec{V})}{dt} + \vec{V} \frac{d(m)}{dt}$$

Visto que a massa total sempre se conserva (exceto em reações atômicas), podemos eliminar o termo de variação da massa com o tempo acima. Logo,

$$\sum \vec{F} = m \frac{d(\vec{V})}{dt} = m\vec{a}$$

**OBS.11:** Desta forma, para analisar a equação do movimento para um fluido, deve-se determinar o campo de aceleração do escoamento por meio do campo de velocidade, como a seguir.

# 4. Conservação da Massa e Momento

## 4.5 A Equação Diferencial da Quantidade de Movimento Linear

**Campo de velocidade:** a forma vetorial CARTESIANA de um campo de velocidades que varia no espaço e no tempo pode ser expressa como:

$$\vec{V} = u(x, y, z, t)\vec{i} + v(x, y, z, t)\vec{j} + w(x, y, z, t)\vec{k}$$

Para calcular o campo vetorial de aceleração do escoamento, deriva-se o campo de velocidade, ou seja,

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{i} \frac{du}{dt} + \vec{j} \frac{dv}{dt} + \vec{k} \frac{dw}{dt}$$

Como cada componente escalar (**u, v, w**) é uma função de quatro variáveis (**x, y, z, t**), aplica-se a regra da cadeia para obter cada derivada temporal total.

**Exemplo:** para a componente da aceleração na direção **x**, a derivada total é dada por

$$\frac{du(x, y, z, t)}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{dz}{dt}$$

# 4. Conservação da Massa e Momento

## 4.5 A Equação Diferencial da Quantidade de Movimento Linear

Visto que  $dx/dt$  é o componente da velocidade local  $u$ ,  $dy/dt = v$  e  $dz/dt = w$ , tem-se, para a componente  $x$  do vetor aceleração:

$$\frac{du(x, y, z, t)}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z}$$

A equação acima também pode ser escrita como

$$\frac{du(x, y, z, t)}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla u$$

Finalmente, podemos aplicar para as outras direções  $y$  e  $z$  e, de uma forma vetorial, tem-se:

$$\vec{a} = \frac{D\vec{V}}{Dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \left( u \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + w \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} \right) \quad \text{ou} \quad \vec{a} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V}$$

Aceleração total

aceleração local

aceleração advectiva ou espacial

**OBS.12:** o termo  $D/Dt$  é denominado de derivada substantiva ou derivada material

# 4. Conservação da Massa e Momento

## 4.5 A Equação Diferencial da Quantidade de Movimento Linear

Logo, a Segunda Lei de Newton, aplicada a uma partícula de fluido ( $dx dy dz$ ) é:

$$\sum \vec{F} = \rho \frac{D\vec{V}}{Dt} dx dy dz$$

A seguir, serão analisadas todas as forças que agem sobre a partícula de fluido em movimento: **forças de campo e forças de superfícies**

### Forças atuando sobre uma Partícula de Fluido em Movimento

**Forças de Campo:** são forças decorrentes de campos externos (gravidade, magnetismo, potencial elétrico, etc.) que agem sobre toda a massa dentro do elemento.

**OBS.12:** consideraremos aqui apenas a força da gravidade sobre a massa diferencial

$$d\vec{F}_{grav} = \rho \vec{g} dx dy dz$$

**Ex:** considerando  $z$  positivo “para cima”, teremos:

$$\vec{g} = -g\vec{k}$$

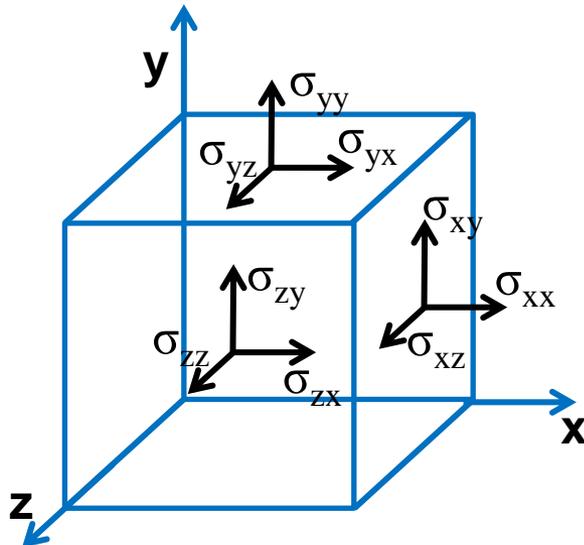
# 4. Conservação da Massa e Momento

## 4.5 A Equação Diferencial da Quantidade de Movimento Linear

**Forças de Superfície:** decorrem das tensões sobre os lados da superfície de controle.

**OBS.13:** As forças de superfície podem ser vistas como a soma da pressão ( $P$ ) e das tensões viscosas ( $\tau_{ij}$ ) que surgem do movimento do fluido (devido aos gradientes de velocidade), compondo, assim, o tensor tensão total ( $\sigma_{ij}$ ):

Representação do tensor total ( $\sigma_{ij}$ ) que age sobre uma partícula de fluido



$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -P & 0 & 0 \\ 0 & -P & 0 \\ 0 & 0 & -P \end{pmatrix}$$

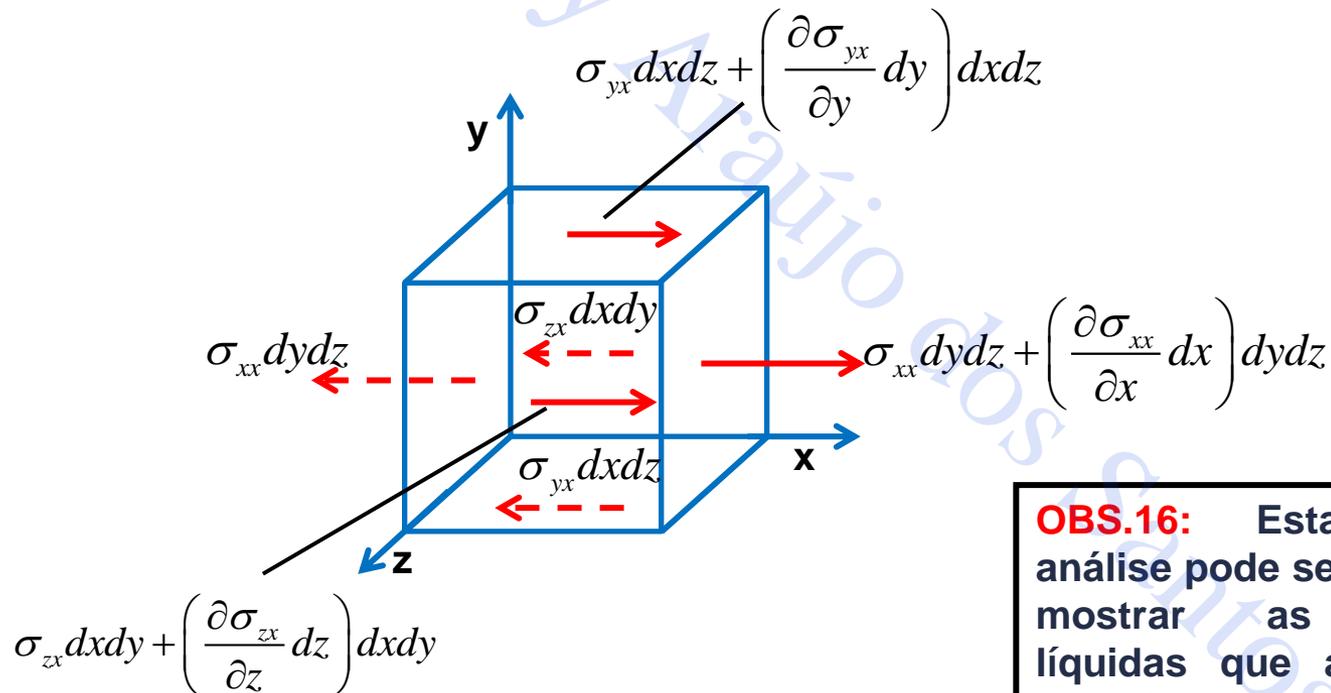
**OBS.14:** visto que a pressão é uma tensão normal e sempre para “dentro”, suas componentes aparecem apenas na diagonal principal do tensor tensão total e negativas.

# 4. Conservação da Massa e Momento

## 4.5 A Equação Diferencial da Quantidade de Movimento Linear

**OBS.15:** não são estas tensões, mas seus gradientes, ou diferenças, que causa uma força líquida sobre a superfície de controle infinitesimal.

**Exemplo:** Realizando o balanço de forças superficiais na direção **x**, tem-se:



**OBS.16:** Esta mesma análise pode ser feita para mostrar as tensões líquidas que atuam nas direções **y** e **z**.

# 4. Conservação da Massa e Momento

## 4.5 A Equação Diferencial da Quantidade de Movimento Linear

Logo, a força de superfície líquida na direção **x** é dada por:

$$dF_{sup,x} = \left( \cancel{\sigma_{xy} dydz} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx dy dz \right) - \cancel{\sigma_{xx} dydz} + \left( \cancel{\sigma_{yx} dx dz} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} dy dx dz \right) - \cancel{\sigma_{yx} dx dz} + \left( \cancel{\sigma_{zx} dx dy} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} dz dx dy \right) - \cancel{\sigma_{zx} dx dy}$$

Após simplificações e dividindo tudo pelo volume infinitesimal **dx dy dz**, tem-se:

$$\frac{dF_{sup,x}}{dx dy dz} = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z}$$

Separando o tensor total ( $\sigma_{ij}$ ) em pressão (**P**) e tensões viscosas ( $\tau_{ij}$ ), tem-se:

$$\frac{dF_{sup,x}}{dx dy dz} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}$$

nas direções **y** e **z** tem-se, de forma análoga:

$$\frac{dF_{sup,y}}{dx dy dz} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}$$

$$\frac{dF_{sup,z}}{dx dy dz} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}$$

# 4. Conservação da Massa e Momento

## 4.5 A Equação Diferencial da Quantidade de Movimento Linear

Na forma vetorial, o vetor força superficial “líquida” se torna:

$$\frac{d\vec{F}_{sup}}{dxdydz} = -\nabla p + \frac{d\vec{F}_{viscosa}}{dxdydz}$$

**Forças Viscosas:** a força viscosa líquida acima, que também é uma “força de superfície”, pode ser representada na sua forma vetorial como abaixo (coordenadas **CARTESIANAS**):

$$\frac{d\vec{F}_{viscosa}}{dxdydz} = \left( \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right) \vec{k}$$

**OBS.16:** A forma compacta da força viscosa líquida pode ser escrita como:

$$\frac{d\vec{F}_{viscosa}}{dxdydz} = \nabla \cdot \tau_{ij} \quad \text{sendo} \quad \tau_{ij} = \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix}$$

# 4. Conservação da Massa e Momento

## 4.5 A Equação Diferencial da Quantidade de Movimento Linear

Retornando à equação da Segunda Lei de Newton aplicada a uma partícula de fluido

$$\sum \vec{F} = \rho \frac{D\vec{V}}{Dt} dx dy dz$$

Substituindo as forças de campo, de superfície e viscosas na equação acima, tem-se a **Equação da Transferência de Quantidade de Movimento Linear** ou a **Equação de Cauchy** na sua forma compacta:

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \vec{g} - \nabla p + \nabla \cdot \tau_{ij}$$



Augustin-Louis Cauchy  
(1789 – 1857)  
**(Físico, matemático e engenheiro francês)**

sendo a aceleração total da partícula de fluido em coordenadas **CARTESIANAS** dada por:

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \left( u \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + w \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} \right)$$

**OBS.17:** esta equação é válida para qualquer fluido em qualquer movimento em geral: **regime transiente, escoamento tridimensional, escoamento compressível** e fluidos de **diferentes reologias**.

# 4. Conservação da Massa e Momento

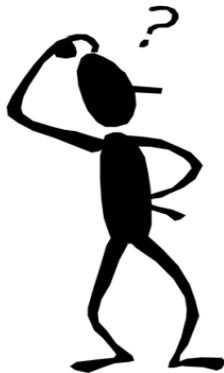
## 4.5 A Equação Diferencial da Quantidade de Movimento Linear

Visto que a **Equação de Cauchy** é vetorial, podemos “abri-la” nas direções **x**, **y** e **z**, em coordenadas CARTESIANAS, como mostrado a seguir

**direção x** 
$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}$$

**direção y** 
$$\rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}$$

**direção z** 
$$\rho \left( \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}$$



**DILEMA:** Observa-se que existem, a princípio, **14 incógnitas** ( **$u, v, w, \rho, P, \tau_{xx}, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yx}, \tau_{yz}, \tau_{zz}, \tau_{zx}$  e  $\tau_{zy}$** ).

Com relação ao número de equações, poderíamos, a princípio, considerar: **4 equações fundamentais** (equação da continuidade e três equações de transferência de quantidade de movimento) e **1 equação constitutiva** (equação de estado termodinâmica relacionando  $\rho$  com  $P$ , para escoamentos compressíveis).

Neste caso, para que o problema tenha solução, necessita-se de **9 EQUAÇÕES ADICIONAIS** relacionadas às tensões viscosas!!!!!!

Como modelar ou relacionar as tensões viscosas que agem sobre uma partícula de fluido em movimento com o campo de velocidades????

# 4. Conservação da Massa e Momento

## 4.5 A Equação Diferencial da Quantidade de Movimento Linear

### a) A Equação de Euler

Primeiramente, no estudo da mecânica dos fluidos, adotou-se a hipótese de um fluido sem atrito ou fluido ideal (**sem viscosidade ou invíscido**)

**OBS.18:** neste caso as tensões viscosas são nulas ( $\tau_{ij} = 0$ ), e a equação do movimento torna-se.

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \vec{g} - \nabla p$$



Leonhard Paul Euler  
(1707 – 1783)

(Físico, matemático e  
astrônomo suíço)

Esta equação é denominada de **Equação de Euler**, e as suas componentes nas direções **x**, **y** e **z**, são, em coordenadas CARTESIANAS:

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y}$$

$$\rho \left( \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z}$$

# 4. Conservação da Massa e Momento

## 4.5 A Equação Diferencial da Quantidade de Movimento Linear

### b) A Equação de Navier-Stokes

Navier-Stokes estenderam a lei de Newton (fluidos newtonianos) para as três direções espaciais, levando em consideração as **deformações normais** e de **cisalhamento lineares** e a **deformação volumétrica**, como seguem:

**Tensões cisalhantes:**

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)$$

**Tensões normais:**

$$\tau_{xx} = 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \nabla \cdot \vec{V}$$

$$\tau_{yy} = 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} + \lambda \nabla \cdot \vec{V}$$

$$\tau_{zz} = 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} + \lambda \nabla \cdot \vec{V}$$

**Sendo:**

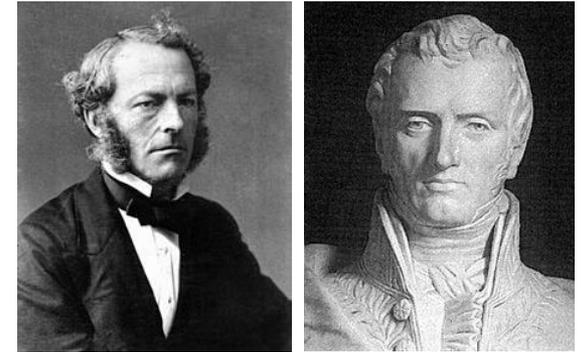
$\mu$ : a viscosidade dinâmica, relativa às deformações lineares normais e cisalhantes

$\lambda$ : o segundo coeficiente de viscosidade, relativo às deformações volumétricas

$\nabla \cdot \vec{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$ : taxa de deformação volumétrica

$\frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial v}{\partial y}$  e  $\frac{\partial w}{\partial z}$ : taxas de deformação linear normal

$\frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$ ,  $\frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right)$  e  $\frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)$ : taxas de deformação linear cisalhante



Sir George Stokes (1819 – 1903)  
 (Matemático e físico irlandês)

Claude-Louis Navier (1785 – 1836)  
 (Matemático, engenheiro e físico francês)

**OBS.19:** observa-se que o tensor viscoso, dado pela lei de Navier-Stokes, é simétrico, ou seja,

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$

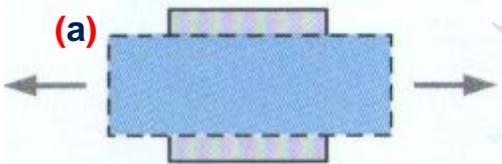
$$\tau_{xz} = \tau_{zx}$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy}$$

# 4. Conservação da Massa e Momento

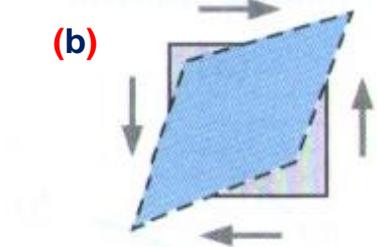
## 4.5 A Equação Diferencial da Quantidade de Movimento Linear

### b) A Equação de Navier-Stokes



(a)

**OBS.20:** Não há um conhecimento muito aprofundado sobre o segundo coeficiente de viscosidade ( $\lambda$ ) pois seu efeito é, na prática, negligenciado (“pequeno”).



(b)

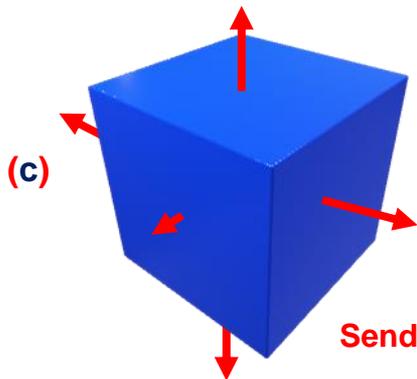
**OBS.21:** Para **gases**, uma boa aproximação pode ser obtida conforme abaixo (Schlichting, 1979):

$$\lambda = -\frac{2}{3}\mu$$

**Sendo:** (a) deformação linear normal;  
 (b) deformação linear cisalhante

**OBS.22:** Visto que para baixas velocidades (**baixos números de Mach**) o escoamento pode ser considerado incompressível, mesmo sendo um gás escoando, tem-se:

Fonte: adaptado de Çengel e Cimbala (2012)



(c)

**Sendo:** (c) deformação volumétrica

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0 \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \tau_{xx} = 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \\ \tau_{yy} = 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \\ \tau_{zz} = 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} \end{array} \right.$$

# 4. Conservação da Massa e Momento

## 4.5 A Equação Diferencial da Quantidade de Movimento Linear

### b) A Equação de Navier-Stokes

Introduzindo estas expressões para as tensões nas equações diferenciais do movimento, obtém-se as **Equações de Navier-Stokes**, nas direções **x**, **y** e **z** (**coordenadas CARTESIANAS**):

Componente na direção **x**:

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \nabla \cdot \vec{V} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right]$$

Componente na direção **y**:

$$\rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} + \lambda \nabla \cdot \vec{V} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right]$$

Componente na direção **z**:

$$\rho \left( \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} + \lambda \nabla \cdot \vec{V} \right]$$

**OBS.22:** estas equações são válidas para escoamentos gerais, tais como, escoamento compressível, transiente, viscosidade variável, escoamento tridimensional, etc.. A sua única restrição é que são aplicadas **APENAS PARA FLUIDOS NEWTONIANOS**

# 4. Conservação da Massa e Momento

## 4.5 A Equação Diferencial da Quantidade de Movimento Linear

### b) A Equação de Navier-Stokes

**SIMPLIFICAÇÃO:** considerando a **viscosidade constante** e o **escoamento incompressível**, as equações anteriores, para um fluido newtoniano, tornam-se em **COORDENADAS CARTESIANAS**:

Componente na direção **x**:

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

Componente na direção **y**:

$$\rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right)$$

Componente na direção **z**:

$$\rho \left( \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right)$$

Em sua forma compacta, tem-se:

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \vec{g} - \nabla p + \mu \nabla^2 \vec{V}$$

# 4. Conservação da Massa e Momento

## 4.5 A Equação Diferencial da Quantidade de Movimento Linear

### b) A Equação de Navier-Stokes

**SIMPLIFICAÇÃO:** considerando a **viscosidade constante** e o **escoamento incompressível**, as equações anteriores, para um fluido newtoniano, tornam-se em **COORDENADAS CILÍNDRICAS:**

Componente na direção **r**:

$$\rho \left( \frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} + V_z \frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{V_\theta^2}{r} \right) = \rho g_r - \frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_r) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V_r}{\partial z^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} \right]$$

Componente na direção  **$\theta$** :

$$\rho \left( \frac{\partial V_\theta}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_\theta}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + V_z \frac{\partial V_\theta}{\partial z} + \frac{V_r V_\theta}{r} \right) = \rho g_\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_\theta) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial z^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right]$$

Componente na direção **z**:

$$\rho \left( \frac{\partial V_z}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_z}{\partial \theta} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) = \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \right]$$

# 4. Conservação da Massa e Momento

## 4.5 A Equação Diferencial da Quantidade de Movimento Linear

### b) A Equação de Navier-Stokes

**SIMPLIFICAÇÃO:** considerando a **viscosidade constante** e o **escoamento incompressível**, as equações anteriores, para um fluido newtoniano, tornam-se em **COORDENADAS ESFÉRICAS:**

Componente na direção **r**:

$$\rho \left( \frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} + \frac{V_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial V_r}{\partial \phi} - \frac{V_\theta^2 + V_\phi^2}{r} \right)$$

$$= \rho g_r - \frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r^2 V_r) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V_r}{\partial \phi^2} \right]$$

Componente na direção  **$\theta$** :

$$\rho \left( \frac{\partial V_\theta}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_\theta}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{V_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial V_\theta}{\partial \phi} + \frac{V_r V_\theta - V_\phi^2 \cot \theta}{r} \right) = \rho g_\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta}$$

$$+ \mu \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial V_\theta}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (V_\theta \sin \theta) \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial \phi^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} - \frac{2 \cot \theta}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial V_\phi}{\partial \phi} \right]$$

Componente na direção  **$\phi$** :

$$\rho \left( \frac{\partial V_\phi}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_\phi}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_\phi}{\partial \theta} + \frac{V_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial V_\phi}{\partial \phi} + \frac{V_\phi V_r + V_\theta V_\phi \cot \theta}{r} \right) = \rho g_\phi - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \phi}$$

$$+ \mu \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial V_\phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (V_\phi \sin \theta) \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V_\phi}{\partial \phi^2} + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial V_r}{\partial \phi} + \frac{2 \cot \theta}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial V_\theta}{\partial \phi} \right]$$

# 4. Conservação da Massa e Momento

## 4.5 A Equação Diferencial da Quantidade de Movimento Linear

### Tensões viscosas em diferentes sistemas de coordenadas

**OBS.23:** considerando o escoamento incompressível, a Lei de Newton (modelo de Navier-Stokes) para as **tensões viscosas** em diferentes sistemas de coordenadas se torna:

**Coordenadas Cartesianas (x, y, z):**

$$\tau_{xx} = \mu \left( 2 \frac{\partial u}{\partial x} \right)$$

$$\tau_{yy} = \mu \left( 2 \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

$$\tau_{zz} = \mu \left( 2 \frac{\partial w}{\partial z} \right)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = \mu \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right)$$

**Coordenadas Cilíndricas (r, θ, z):**

$$\tau_{rr} = \mu \left( 2 \frac{\partial V_r}{\partial r} \right)$$

$$\tau_{\theta\theta} = \mu \left[ 2 \left( \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{V_r}{r} \right) \right]$$

$$\tau_{zz} = \mu \left( 2 \frac{\partial V_z}{\partial z} \right)$$

$$\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} = \mu \left[ r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{V_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right]$$

$$\tau_{\theta z} = \tau_{z\theta} = \mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial V_z}{\partial \theta} + \frac{\partial V_\theta}{\partial z} \right)$$

$$\tau_{rz} = \tau_{zr} = \mu \left( \frac{\partial V_r}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial r} \right)$$

**Coordenadas Esféricas (r, θ, φ):**

$$\tau_{rr} = \mu \left( 2 \frac{\partial V_r}{\partial r} \right)$$

$$\tau_{\theta\theta} = \mu \left[ 2 \left( \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{V_r}{r} \right) \right]$$

$$\tau_{\phi\phi} = \mu \left[ 2 \left( \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V_\phi}{\partial \phi} + \frac{V_r + V_\theta \cot \theta}{r} \right) \right]$$

$$\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} = \mu \left[ r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{V_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right]$$

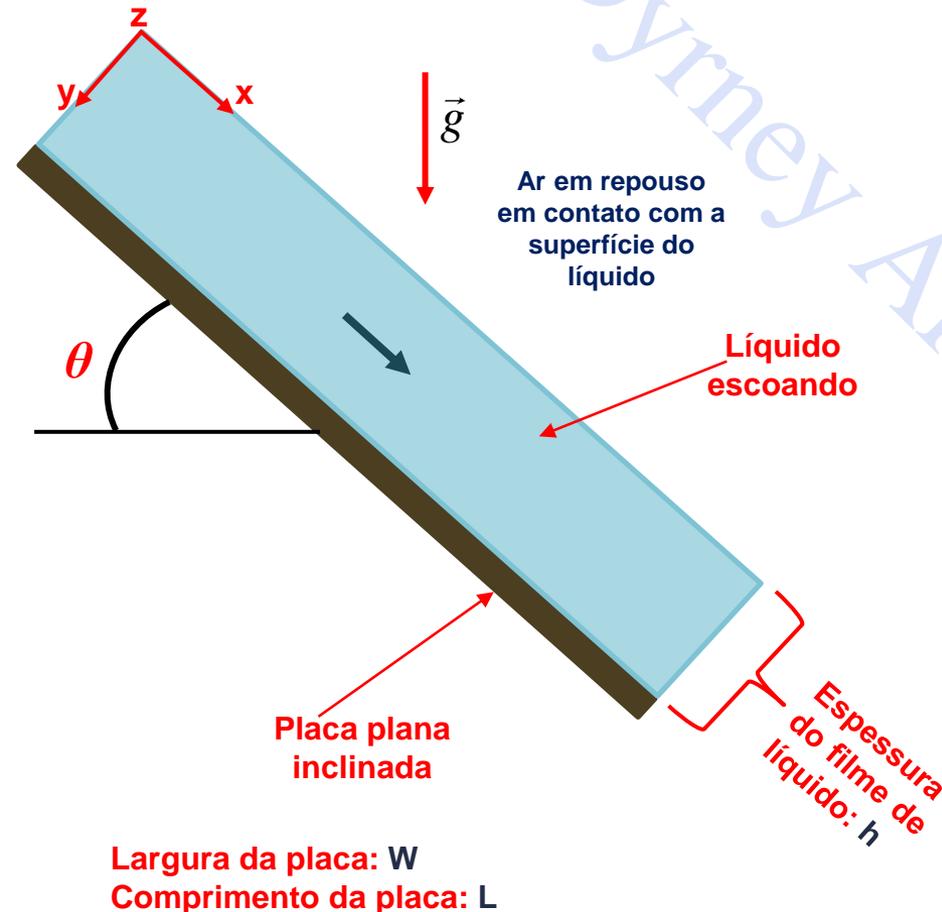
$$\tau_{\theta\phi} = \tau_{\phi\theta} = \mu \left[ \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{V_\phi}{\sin \theta} \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V_\theta}{\partial \phi} \right]$$

$$\tau_{\phi r} = \tau_{r\phi} = \mu \left[ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V_r}{\partial \phi} + r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{V_\phi}{r} \right) \right]$$

# 4. Conservação da Massa e Momento

## 4.6 Estudos de Caso a serem desenvolvidos durante a aula

**Estudo de Caso 1:** Escoamento de um líquido sobre uma placa plana inclinada sob a ação apenas da força gravitacional



**Questão:** Após adotar hipóteses adequadas, encontre:

- o perfil de distribuição de velocidades e o perfil de distribuição de tensão viscosa no interior do fluido. Plote ambos os perfis no desenho ao lado;
- a velocidade média e a vazão volumétrica de escoamento do fluido;
- a relação entre a velocidade média e a velocidade máxima de escoamento do fluido;
- a força, em módulo, que a placa deve exercer sobre o fluido para que a mesma não seja “arrastada” por ele.

**Observação:** A velocidade média ( $V_{média}$ ), quando se tem uma distribuição de velocidades ( $V$ ), é dada por:

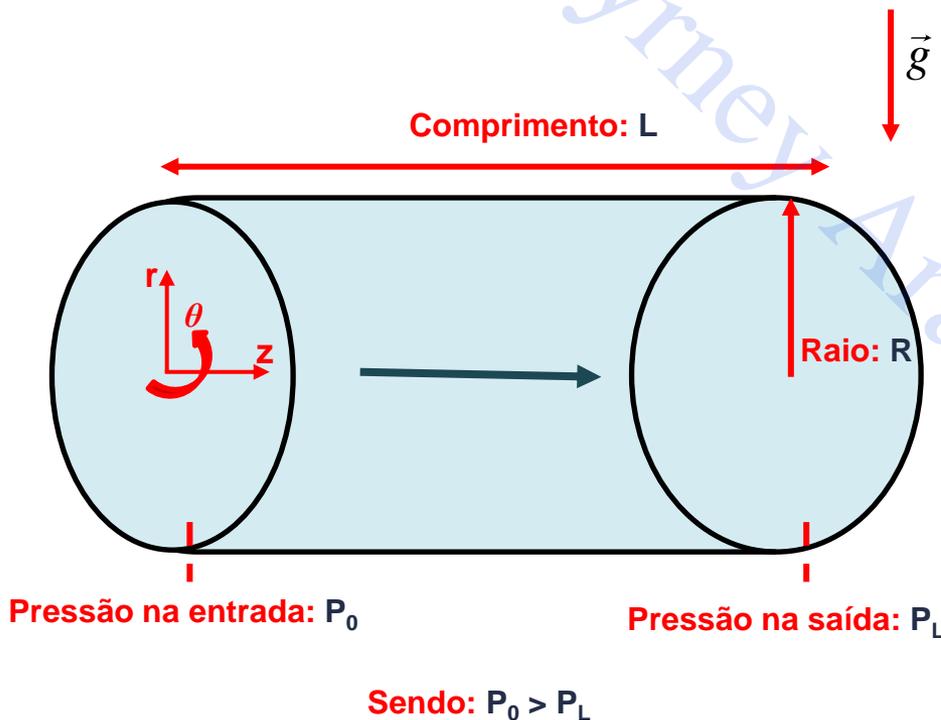
$$V_{média} = \frac{1}{A} \int V dA$$

sendo “ $A$ ” a área da seção transversal do escoamento, “ $V$ ” a função de distribuição de velocidade e “ $dA$ ” o elemento infinitesimal da área da seção transversal

# 4. Conservação da Massa e Momento

## 4.6 Estudos de Caso a serem desenvolvidos durante a aula

**Estudo de Caso 2:** Escoamento no interior de um tubo horizontal com área da seção transversal circular sob a ação da força de pressão (gradiente de pressão)



**Questão:** Após adotar hipóteses adequadas, encontre:

- o perfil de distribuição de velocidades e o perfil de distribuição de tensão viscosa no interior do escoamento. Plote ambos os perfis no desenho ao lado;
- a velocidade média e a vazão volumétrica de escoamento do fluido;
- a relação entre a velocidade média e a velocidade máxima de escoamento do fluido;
- a força, em módulo, que o fluido exerce sobre a parede do tubo.

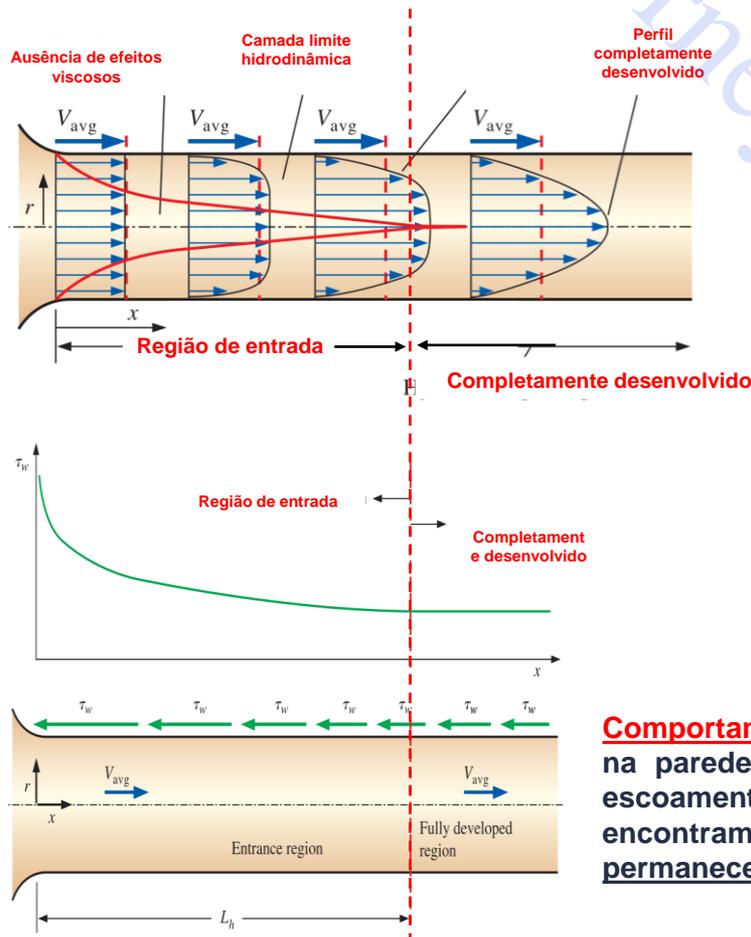
# 4. Conservação da Massa e Momento

## 4.6 Estudos de Caso a serem desenvolvidos durante a aula

**Estudo de Caso 2:** Escoamento no interior de um tubo horizontal com área da seção transversal circular sob a ação da força de pressão (gradiente de pressão)

Neste Estudo de Caso 2, serão abordados os seguintes conceitos

Fonte: Çengel e Cimbala (2015)



**Escoamento hidrodinamicamente desenvolvido:** visto que a espessura da camada limite aumenta no sentido do escoamento, a posição, a partir da entrada do tubo, onde ocorre a “fusão” da camada-limite no eixo central do tubo é chamado de comprimento de entrada hidrodinâmico ( $x_{cd,v}$ ) e, neste caso, o escoamento é dito **completamente ou hidrodinamicamente desenvolvido**. Neste caso, a velocidade  $V$  não varia mais com  $z$  (direção do escoamento), apenas com  $r$ , logo  $V(r)$ . O comprimento de entrada depende do regime de escoamento (**laminar** ou **turbulento**). Abaixo é mostrada algumas correlações para a estimativa do comprimento de entrada (**D: diâmetro do tubo**):

- **Escoamento Laminar** ( $Re_D < 2300$ ):  $\left(\frac{x_{cd,v}}{D}\right) \approx 0,05 Re_D$
- **Escoamento Turbulento** ( $Re_D > 2300$ ):  $\left(\frac{x_{cd,v}}{D}\right) > 10$

**Comportamento da tensão viscosa na parede:** na entrada do tubo, a tensão viscosa na parede tem um valor muito alto e vai decrescendo ao longo do sentido do escoamento do fluido. Logo, os maiores efeitos de atrito do fluido sobre a parede se encontram próximos à entrada da tubulação. Por outro lado, a tensão viscosa **permanece constante** quando o escoamento se torna completamente desenvolvido.

# 4. Conservação da Massa e Momento

## 4.6 Estudos de Caso a serem desenvolvidos durante a aula

**Estudo de Caso 2:** Escoamento no interior de um tubo horizontal com área da seção transversal circular sob a ação da força de pressão (gradiente de pressão)

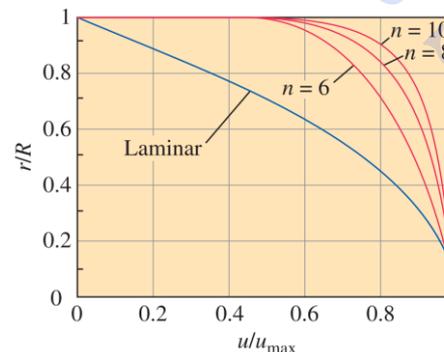
**Neste Estudo de Caso 2, serão abordados os seguintes conceitos**

**OBS. 1:** O Estudo de Caso 2, desenvolvido aqui, somente é válido para escoamento laminar. No gráfico do perfil adimensional de velocidades ao lado ( $V_z/V_{\text{máximo}}$  versus  $r/R$ ), nota-se o perfil “empistonado” (forma de pistão) do escoamento turbulento, o que evidencia a maior tensão viscosa na parede quando comparado com o perfil laminar

**OBS. 2:** Em virtude da complexidade em se prever o perfil de escoamento turbulento de forma teórica, normalmente realizam-se experimentos e determinam-se perfis turbulentos adimensionais. A distribuição de velocidades (escoamento médio) e a relação entre a velocidade média e a velocidade máxima de um escoamento no regime turbulento podem ser previstas conforme abaixo (escoamento completamente desenvolvido):

$$\bar{V}_z = V_{\text{máxima}} \left(1 - \frac{r}{R}\right)^{\frac{1}{n}} \quad \text{e} \quad \bar{V}_{\text{média}} = \frac{4}{5} V_{\text{máxima}}$$

O valor de “n” depende da faixa de **Re**.  
 Pode-se adotar **n = 7**  
 se  $1 \times 10^4 < \text{Re} < 1 \times 10^5$



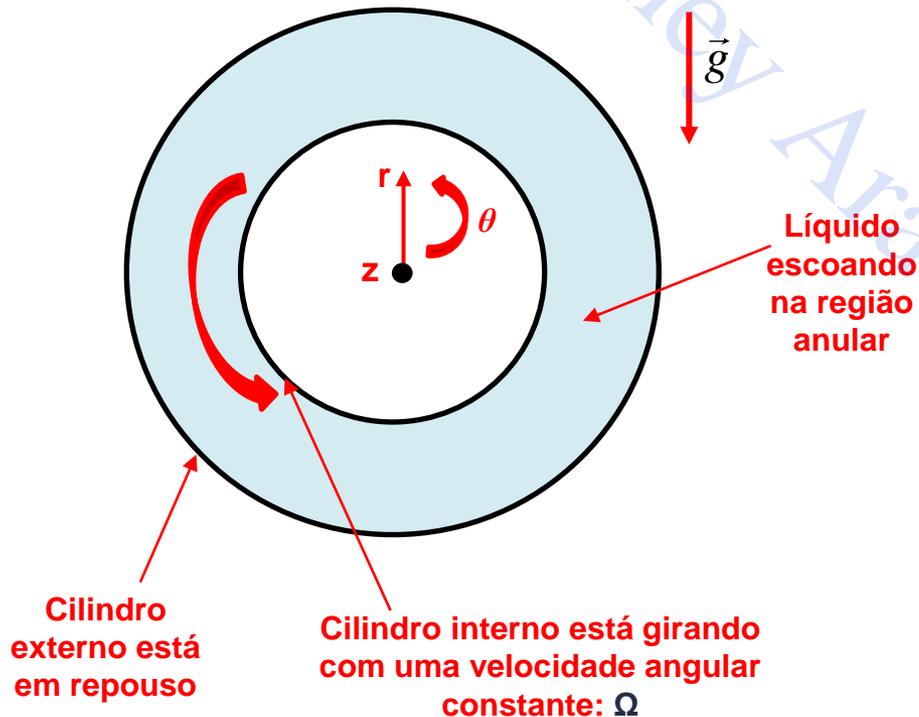
O gráfico ao lado mostra a influência do valor de “n” no perfil de velocidade turbulento

# 4. Conservação da Massa e Momento

## 4.6 Estudos de Caso a serem desenvolvidos durante a aula

**Estudo de Caso 3:** Escoamento na região anular entre dois cilindros concêntricos, cujas extremidades estão tapadas, sendo que o cilindro interno gira com uma velocidade angular constante.

Princípio de funcionamento de um “**Viscosímetro Rotacional de Tubos Concêntricos**”.



Raio externo do cilindro interno:  $R_1$   
Raio interno do cilindro externo:  $R_2$

**Questão:** Após adotar hipóteses adequadas, encontre:

- o perfil de distribuição de velocidades no interior do escoamento. Plote o perfil no desenho ao lado;
- a viscosidade do fluido em função das demais variáveis do problema (incluindo o torque aplicado no cilindro interno).

# 4. Conservação da Massa e Momento

## 4.6 Estudos de Caso a serem desenvolvidos durante a aula

**Estudo de Caso 4:** Escoamento no interior de um tubo na vertical com área da seção transversal circular sob a ação da força de pressão (gradiente de pressão) e da força gravitacional

**Questão:** Após adotar hipóteses adequadas, encontre:

a) o perfil de distribuição de velocidades e o perfil de distribuição de tensão viscosa no interior do escoamento. Plote ambos os perfis no desenho ao lado;

b) a velocidade média e a vazão volumétrica de escoamento do fluido;

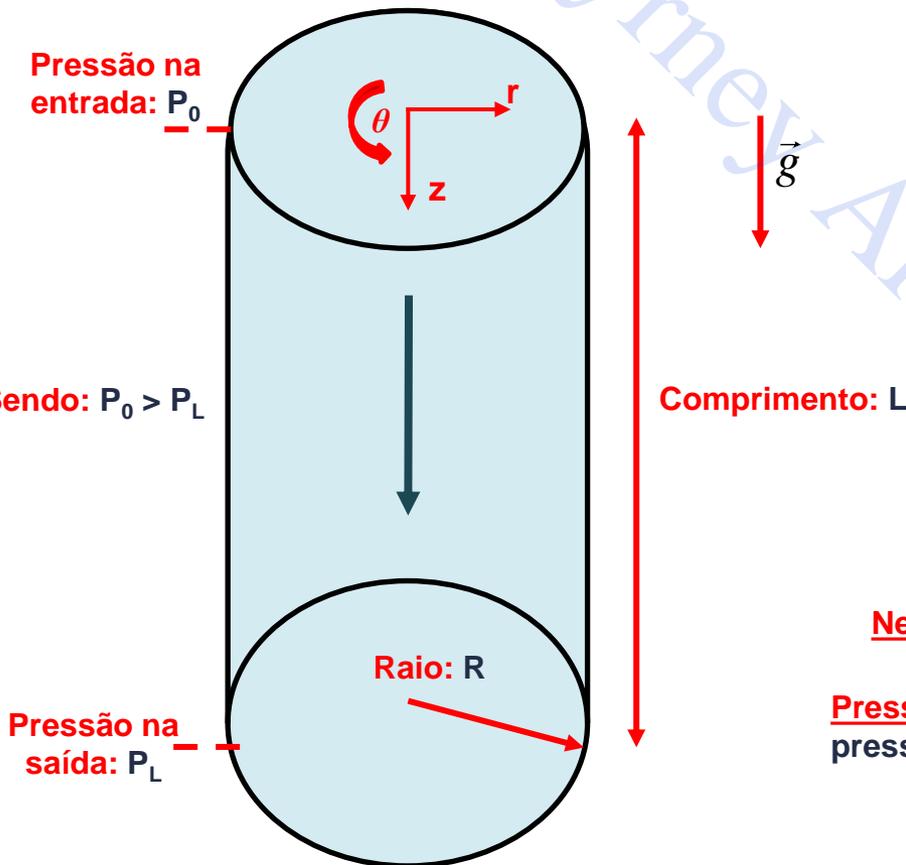
c) a relação entre a velocidade média e a velocidade máxima de escoamento do fluido;

d) a força, em módulo, que o fluido exerce sobre a parede do tubo.

**Neste Estudo de Caso 4, será abordado o seguinte conceito:**

**Pressão Piezométrica ( $\mathbb{P}$ ):** definida conforme abaixo, sendo a pressão estática ( $P$ ) menos a pressão hidrodinâmica ( $\rho g z$ ).

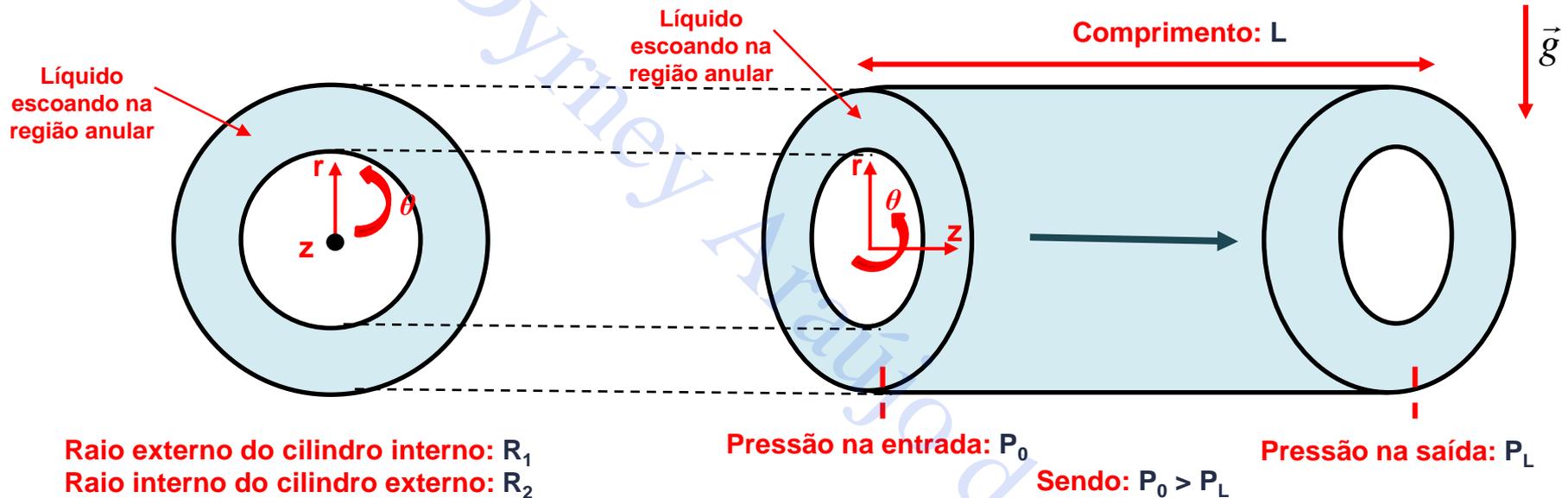
$$\mathbb{P} = P - \rho g z$$



# 4. Conservação da Massa e Momento

## 4.6 Estudos de Caso a serem desenvolvidos durante a aula

**Estudo de Caso 5:** Escoamento na região anular entre dois tubos concêntricos, de área da seção circular, na horizontal sob a ação da força de pressão (gradiente de pressão)



**Questão:** Após adotar hipóteses adequadas, encontre:

- o perfil de distribuição de velocidades e o perfil de distribuição de tensão viscosa no interior do escoamento. Plote ambos os perfis no desenho ao lado;
- a velocidade média e a vazão volumétrica de escoamento do fluido;
- a relação entre a velocidade média e a velocidade máxima de escoamento do fluido;
- a força, em módulo, que o fluido exerce sobre a parede do tubo.

# Bibliografia

**BIRD, R.B.; STEWART, W.E. e; LIGHTFOOT, E.N. Fenômenos de transporte, 2ª ed., LTC, 2004.**

**ÇENGEL, Y.A e CIMBALA, J.M.; Mecânica dos fluidos, McGraw Hill, 3ª edição, 2015.**

**WHITE, F. M. Mecânica dos Fluidos. 6ª edição. MCGRAW-HILL, 2011.**

**INCROPERA, F.P. e DEWITT, D.P. Fundamentos de transferência de calor e massa, 6ª ed., LTC, 2008.**