



**Instituto de Química**  
IQ - UFG



**ENGENHARIA QUÍMICA**  
Universidade Federal de Goiás

# Análise Dimensional e Similaridade

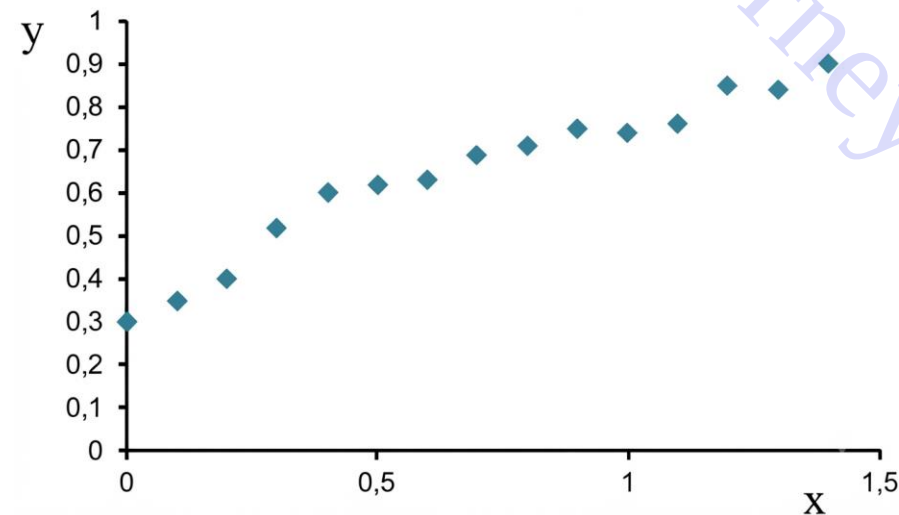
Professor Dyrney Araújo dos Santos  
**Universidade Federal de Goiás**  
**Curso de Engenharia Química**  
site: [www.dyrney.com](http://www.dyrney.com)

# 6 . Análise Dimensional e Similaridade

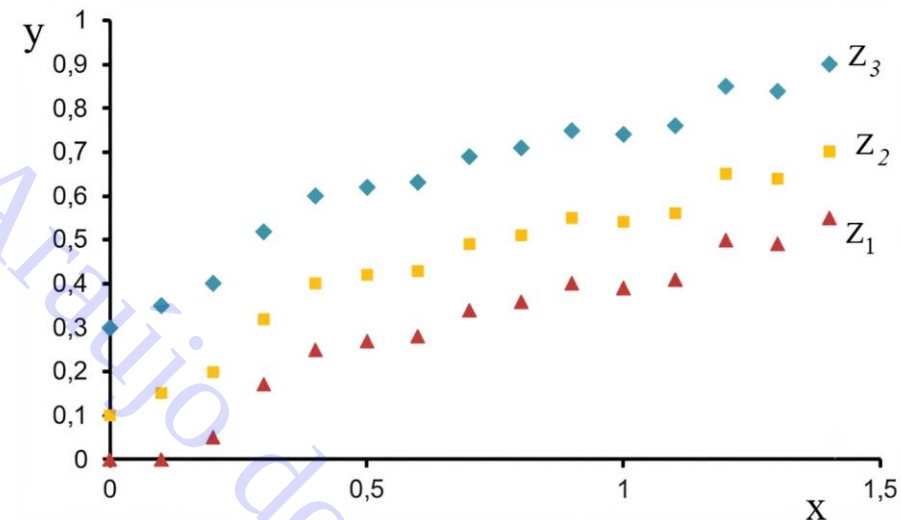
## 6.1 Introdução

Problemas complexos ou que não tenham uma teoria ainda bem posta podem ser tratados de forma empírica. Exemplos de como se obter, experimentalmente, correlações entre variáveis:

**a)** Se  $y = y(x)$ , pode-se variar  $x$  e medir  $y$  e, após obter um gráfico de dispersão, ajustar um modelo estatístico



**b)** Se  $y = y(x, z)$ , pode-se manter  $z$  constante, variar  $x$  e medir  $y$  e, após obter os dados, realizar uma regressão múltipla



Esta metodologia de “fixar e variar variáveis”, entretanto, é inadequada para um conjunto muito grande de variáveis, pois necessita de um número muito grande de experimentos para se obter uma correlação, ou seja, alto custo de matéria-prima e operação.

**Solução:** Utilizar a análise dimensional para encontrar os grupos adimensionais relevantes ao problema em questão e, desta forma, reduzir o número de experimentos necessários.

**Análise Dimensional:** Método para reduzir o número e a complexidade das variáveis experimentais que afetam um dado fenômeno físico, pela aplicação de um tipo de técnica de “compactação”.

# 6 . Análise Dimensional e Similaridade

## 6.2 Teorema $\pi$ -Buckingham

**Definição do Teorema  $\pi$ -Buckingham:** teorema utilizado na Análise Dimensional para encontrar um conjunto de parâmetros adimensionais relevantes ao problema estudado a fim de simplificá-lo.



Edgar Buckingham  
(1867 – 1940)  
(Físico norte  
americano)

### Etapas que compõem o Teorema de Buckingham

- 1ª Listam-se as variáveis relevantes ao problema em análise ( $n_v$ );
- 2ª Seleciona-se um sistema básico de dimensões (**M** = massa; **L** = comprimento; **T** = tempo;  **$\theta$**  = temperatura);
- 3ª Constrói-se a matriz dimensional das variáveis envolvidas. Os elementos da matriz dimensional são os expoentes a que estão elevados cada um dos termos da representação dimensional da variável;
- 4ª Determina-se o rank ( **$r$** ) da matriz dimensional, que é a ordem do maior determinante não nulo subtendido pela matriz;

# 6 . Análise Dimensional e Similaridade

## 6.2 Teorema $\pi$ -Buckingham

**5ª** Calcula-se o número de grupos adimensionais relevantes ao fenômeno ( $\pi$  grupos através da Equação abaixo):

$$n_{\pi} = n_v - r$$

**6ª** Escolhe-se o núcleo de variáveis que consiste de um subgrupo de  $r$  variáveis que deve necessariamente conter todas as dimensões envolvidas no problema;

É aconselhável, sempre que possível, escolher uma variável **geométrica**, uma **cinemática**, uma **dinâmica** e uma **térmica** para comporem o núcleo.

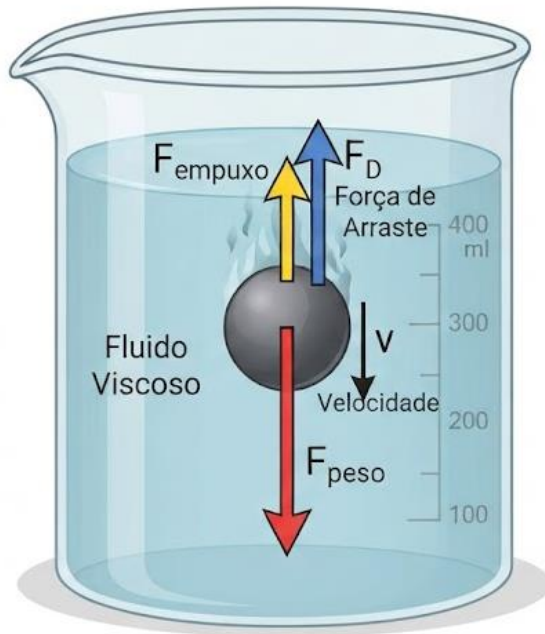
**7ª** Resolve-se o sistema de equações dimensionais obtidos a partir da combinação das variáveis que compõem o núcleo com cada uma das variáveis restantes e obtêm-se os  $\pi$  grupos;

**8ª** Verifica-se a independência dos grupos e realizam-se experimentos para correlacioná-los.

# 6 . Análise Dimensional e Similaridade

## 6.2 Teorema $\pi$ -Buckingham

**Exemplo 1:** A Força de Arraste ( $F_D$ ) que age sobre uma esfera em queda num fluido é função da velocidade de queda,  $V$ , da área projetada da esfera,  $A$ , da massa específica do fluido,  $\rho$ , e da viscosidade do fluido,  $\mu$ . Determine os números adimensionais que podem ser usados para correlacionar dados experimentais.



i) Variáveis relevantes ( $n_v$ ) e sistema básico de dimensões ( $MLT\theta$ )

$F_D$ : força de arrasto [ $MLT^{-2}$ ];

$\rho$ : massa específica do fluido [ $ML^{-3}$ ];

$V$ : velocidade de queda [ $LT^{-1}$ ];

$\mu$ : viscosidade do fluido [ $ML^{-1}T^{-1}$ ];

$A$ : área projetada da esfera [ $L^2$ ];

Exemplos de dimensões de variáveis:

$$[F] = [m][a] = M \frac{L}{T^2} = MLT^{-2}$$

# 6 . Análise Dimensional e Similaridade

## 6.2 Teorema $\pi$ -Buckingham

### (ii) Matriz Dimensional

$$\begin{matrix} & F_D & \rho & A & V & \mu \\ \begin{matrix} M \\ L \\ T \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 2 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

### (iii) Rank (r): ordem do maior determinante não nulo (variáveis independentes)

Analisando o determinante da seguinte matriz, temos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \longrightarrow r \text{ (rank)} = 3$$

### (iv) Número de grupos adimensionais relevantes ( $\pi$ grupos)

$$n_{\pi} = n_v - r \longrightarrow n_{\pi} = 5 - 3 \longrightarrow n_{\pi} = 2 \text{ (2 grupos adimensionais)}$$

# 6 . Análise Dimensional e Similaridade

## 6.2 Teorema $\pi$ -Buckingham

(v) Escolhe-se um núcleo para a determinação dos  $\pi$  grupos

Núcleo: {  
     **A** – variável geométrica  
     **v** – variável cinemática  
      **$\rho$**  – variável dinâmica

Deve-se combinar cada uma das variáveis do núcleo com as variáveis restantes para encontrar os adimensionais.

(vi) Determinação dos número adimensionais

(a)  $\Pi_1 = A^a V^b \rho^c F_D$

Adimensionalizando:

$$[M^0 L^0 T^0] = [M^0 L^2 T^0]^a [M^0 L^1 T^{-1}]^b [M^1 L^{-3} T^0]^c [M^1 L^1 T^{-2}]$$

$$[M^0 L^0 T^0] = [M^{0a+0b+1c+1} L^{2a+1b-3c+1} T^{0a-1b+0c-2}]$$

# 6 . Análise Dimensional e Similaridade

## 6.2 Teorema $\pi$ -Buckingham

Equacionando M, L e T resulta no seguinte sistema

$$\left. \begin{array}{l} \text{M: } 0a+0b+1c+1=0 \\ \text{L: } 2a+1b-3c+1=0 \\ \text{T: } 0a-1b-0c-2=0 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{resolvendo}} \begin{array}{l} a = -1 \\ b = -2 \\ c = -1 \end{array}$$

**Coeficiente de arraste ( $C_D$ ):**  
 relacionado com a força de  
 arraste sobre um corpo.

Logo, retornando ao  $\Pi_1$ :  $\Pi_1 = A^a V^b \rho^c F_D \xrightarrow{\text{Incluindo } \frac{1}{2} \text{ no denominador}} \Pi_1 = \frac{F_D}{\rho V^2 A} \rightarrow C_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2} \rho V^2 A}$

(b)  $\Pi_2 = A^a V^b \rho^c \mu$

Adimensionalizando:

$$[M^0 L^0 T^0] = [M^0 L^2 T^0]^a [M^0 L^1 T^{-1}]^b [M^1 L^{-3} T^0]^c [M^1 L^{-1} T^{-1}]$$

$$[M^0 L^0 T^0] = [M^{0a+0b+1c+1} L^{2a+1b-3c-1} T^{0a-1b+0c-1}]$$



# 6 . Análise Dimensional e Similaridade

## 6.2 Teorema $\pi$ -Buckingham

Novamente, equacionando M, L e T resulta no seguinte sistema

$$\left. \begin{array}{l} \text{M: } 0a+0b+1c+1=0 \\ \text{L: } 2a+1b-3c-1=0 \\ \text{T: } 0a-1b+0c-1=0 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{resolvendo}} \begin{array}{l} a = -1/2 \\ b = -1 \\ c = -1 \end{array}$$

Logo, retornando ao  $\Pi_2$ :  $\Pi_2 = A^a V^b \rho^c \mu \rightarrow \Pi_2 = \frac{\mu}{A^{1/2} V \rho}$

Visto que a raiz quadrada da área dará uma dimensão de comprimento, podemos substituir " $A^{1/2}$ " por " $D$ ", comprimento característico que no caso da esfera, será o seu diâmetro).

$$\Pi_2 = \frac{\mu}{DV\rho} \xrightarrow{\text{Invertendo este número}}$$

$$Re = \frac{DV\rho}{\mu}$$

**Número de Reynolds**



Osborne Reynolds  
 (1842 – 1912)  
 (Físico e engenheiro irlandês)

Desta forma, pode escrever:

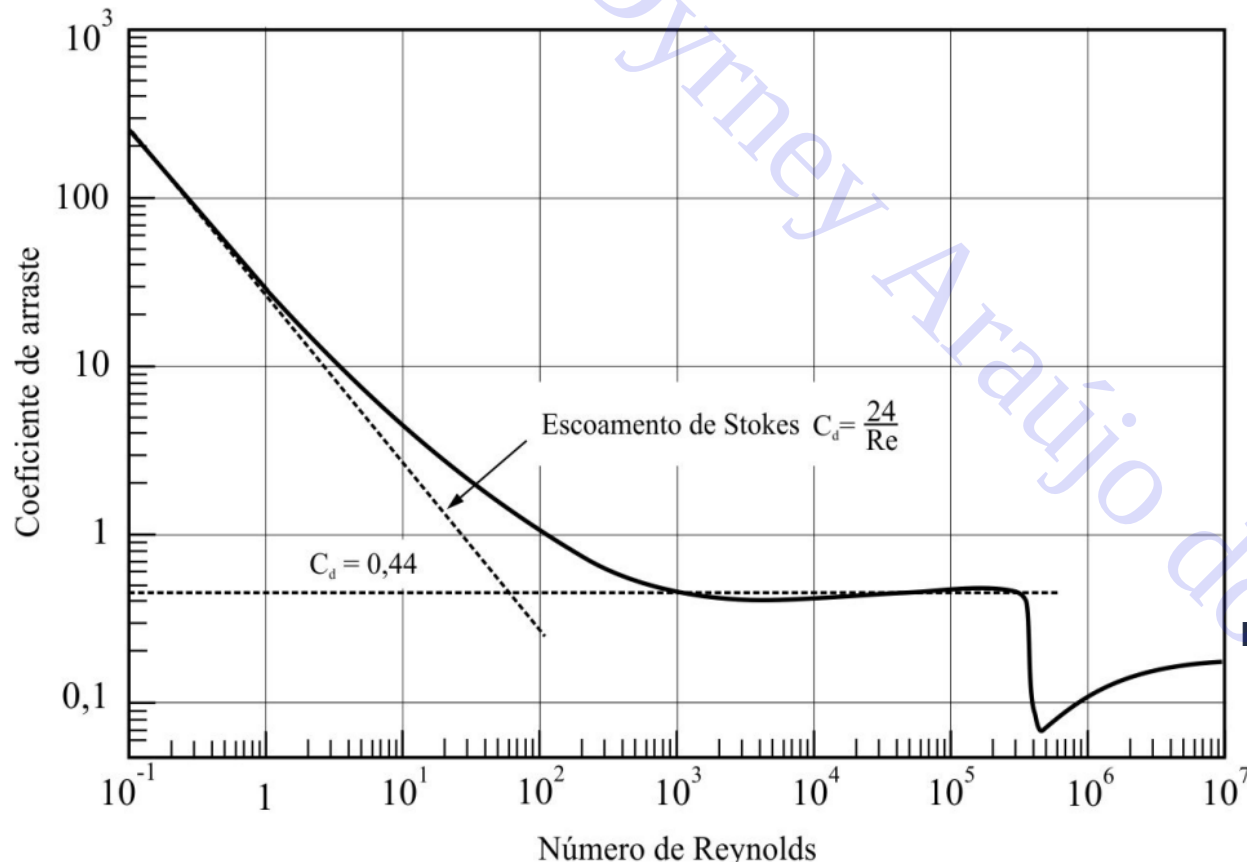
$$C_D = f(Re)$$

Logo, pode-se realizar experimentos utilizando apenas duas variáveis ao invés de cinco para determinar uma correlação para a estimativa de  $F_D$ .

# 6 . Análise Dimensional e Similaridade

## 6.2 Teorema $\pi$ -Buckingham

Valores de coeficiente de arraste ( $C_D$ ) em função do número de Reynolds ( $Re$ ) para o escoamento em torno de uma esfera



No caso de baixos números de  $Re$  ( $Re \leq 1$ ) (regime de stokes), o coeficiente de arraste ( $C_D$ ) é dado por:

$$C_D = \frac{24}{Re}$$

No caso de  $10^3 \leq Re \leq 5 \times 10^5$ , o coeficiente de arraste permanece aproximadamente constante:  
 $C_D = 0,44$

Em torno de  $Re = 5 \times 10^5$  ocorre uma queda brusca no valor de  $C_D$  devido à transição para o regime turbulento.

# 6 . Análise Dimensional e Similaridade

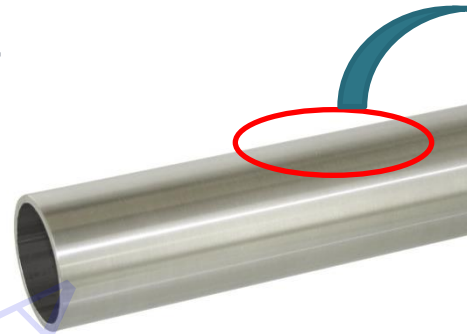
## 6.2 Teorema $\pi$ -Buckingham

**Exemplo 2** - Análise da Perda de carga de fluidos em escoamento em dutos de seção circular

i) Variáveis relevantes ( $n_v$ ) e sistema básico de dimensões ( $MLT\theta$ )

**fluido** {  
 $\mu$ : viscosidade do fluido [ $ML^{-1}T^{-1}$ ]  
 $\rho$ : massa específica do fluido [ $ML^{-3}$ ]  
 $-\Delta P$ : queda de pressão piezométrica [ $ML^{-1}T^2$ ]  
 $V$ : velocidade média [ $LT^{-1}$ ]

**tubo** {  
 $D$ : diâmetro [ $L$ ]  
 $L$ : comprimento [ $L$ ]  
 $\varepsilon$ : rugosidade [ $L$ ]



$\varepsilon$    
 rugosidade da superfície  
 (média dos picos)

(ii) Matriz Dimensional

|     | $\mu$ | $\rho$ | $D$ | $L$ | $\varepsilon$ | $-\Delta P$ | $V$ |
|-----|-------|--------|-----|-----|---------------|-------------|-----|
| $M$ | 1     | 1      | 0   | 0   | 0             | 1           | 0   |
| $L$ | -1    | -3     | 1   | 1   | 1             | -1          | 1   |
| $T$ | -1    | 0      | 0   | 0   | 0             | -2          | -1  |

# 6 . Análise Dimensional e Similaridade

## 6.2 Teorema $\pi$ -Buckingham

(iii) Rank (r): ordem do maior determinante não nulo (variáveis independentes)

Analisando o determinante da seguinte matriz, temos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \longrightarrow r \text{ (rank)} = 3$$

(iv) Número de grupos adimensionais relevantes ( $\pi$  grupos)

$$n_{\pi} = n_v - r \longrightarrow n_{\pi} = 7 - 3 \longrightarrow n_{\pi} = 4 \text{ (4 grupos adimensionais)}$$

(v) Escolhe-se um núcleo para a determinação dos  $\pi$  grupos

Núcleo:  $\left\{ \begin{array}{l} D - \text{variável geométrica} \\ v - \text{variável cinemática} \\ \rho - \text{variável dinâmica} \end{array} \right.$

Deve-se combinar cada uma das variáveis do núcleo com as variáveis restantes para encontrar os adimensionais.

# 6 . Análise Dimensional e Similaridade

## 6.2 Teorema $\pi$ -Buckingham

### (vi) Determinação dos número adimensionais

(a)  $\Pi_1 = D^a V^b \rho^c \mu$

Adimensionalizando:

$$[M^0 L^0 T^0] = [M^0 L^1 T^0]^a [M^0 L^1 T^{-1}]^b [M^1 L^{-3} T^0]^c [M^1 L^{-1} T^{-1}]$$

$$[M^0 L^0 T^0] = [M^{0a+0b+1c+1} L^{1a+1b-3c-1} T^{0a-1b+0c-1}]$$

Equacionando M, L e T resulta no seguinte sistema

$$\left. \begin{array}{l} \text{M: } 0a+0b+1c+1=0 \\ \text{L: } 1a+1b-3c-1=0 \\ \text{T: } 0a-1b+0c-1=0 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{resolvendo}} \begin{array}{l} a = -1 \\ b = -1 \\ c = -1 \end{array}$$



Osborne Reynolds  
 (1842 – 1912)  
 (Físico e engenheiro  
 irlandês)

Logo, retornando ao  $\Pi_1$ :

$$\Pi_1 = D^a V^b \rho^c \mu$$

$$\Pi_1 = \frac{\mu}{DV\rho}$$

$$\Pi_1 = Re$$

Número de  
 Reynolds

# 6 . Análise Dimensional e Similaridade

## 6.2 Teorema $\pi$ -Buckingham

(b)  $\Pi_2 = D^a V^b \rho^c L$

Adimensionalizando:

$$[M^0 L^0 T^0] = [M^0 L^1 T^0]^a [M^0 L^1 T^{-1}]^b [M^1 L^{-3} T^0]^c [M^0 L^1 T^0]$$

$$[M^0 L^0 T^0] = [M^{0a+0b+1c+0} L^{1a+1b-3c+1} T^{0a-1b+0c+0}]$$

Equacionando M, L e T resulta no seguinte sistema

$$\left. \begin{array}{l} \text{M: } 0a+0b+1c+0=0 \\ \text{L: } 1a+1b-3c+1=0 \\ \text{T: } 0a-1b+0c+0=0 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{resolvendo}} \begin{array}{l} a = -1 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{array}$$

Logo, retornando ao  $\Pi_2$ :  $\Pi_2 = D^a V^b \rho^c L \longrightarrow$

$$\boxed{\Pi_2 = \frac{L}{D}}$$

# 6 . Análise Dimensional e Similaridade

## 6.2 Teorema $\pi$ -Buckingham

(c)  $\Pi_3 = D^a V^b \rho^c \varepsilon$

Adimensionalizando:

$$[M^0 L^0 T^0] = [M^0 L^1 T^0]^a [M^0 L^1 T^{-1}]^b [M^1 L^{-3} T^0]^c [M^0 L^1 T^0]$$

$$[M^0 L^0 T^0] = [M^{0a+0b+1c+0} L^{1a+1b-3c+1} T^{0a-1b+0c+0}]$$

Equacionando M, L e T resulta no seguinte sistema

$$\left. \begin{array}{l} \text{M: } 0a+0b+1c+0=0 \\ \text{L: } 1a+1b-3c+1=0 \\ \text{T: } 0a-1b+0c+0=0 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{resolvendo}} \begin{array}{l} a = -1 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{array}$$

Logo, retornando ao  $\Pi_3$ :  $\Pi_3 = D^a V^b \rho^c \varepsilon \longrightarrow$

$$\Pi_3 = \frac{\varepsilon}{D}$$

Rugosidade  
relativa

# 6 . Análise Dimensional e Similaridade

## 6.2 Teorema $\pi$ -Buckingham

(d)  $\Pi_4 = D^a V^b \rho^c (-\Delta P)$

Adimensionalizando:

$$[M^0 L^0 T^0] = [M^0 L^1 T^0]^a [M^0 L^1 T^{-1}]^b [M^1 L^{-3} T^0]^c [M^1 L^{-1} T^{-2}]$$

$$[M^0 L^0 T^0] = [M^{0a+0b+1c+1} L^{1a+1b-3c-1} T^{0a-1b+0c-2}]$$

Equacionando M, L e T resulta no seguinte sistema

$$\left. \begin{array}{l} \text{M: } 0a+0b+1c+1=0 \\ \text{L: } 1a+1b-3c-1=0 \\ \text{T: } 0a-1b+0c-2=0 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{resolvendo}} \begin{array}{l} a = 0 \\ b = -2 \\ c = -1 \end{array}$$

Logo, retornando ao  $\Pi_4$ :  $\Pi_4 = D^a V^b \rho^c (-\Delta P) \rightarrow$

$$\Pi_4 = \frac{(-\Delta P)}{\rho V^2}$$



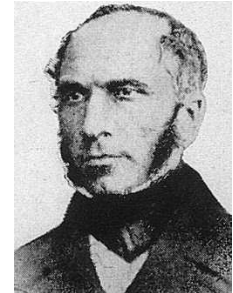
# 6 . Análise Dimensional e Similaridade

## 6.2 Teorema $\pi$ -Buckingham

Fazendo

$$\frac{2\Pi_4}{\Pi_2} = \frac{2(-\Delta P) D}{\rho V^2 L} \xrightarrow{\text{define-se}} f = \frac{(-\Delta P) D}{(\rho V^2 / 2) L} \quad (\text{Eq. 1})$$

**Fator de atrito de Darcy:** relacionado à perda de carga em tubulações.



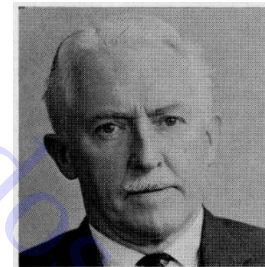
Henry Philibert Gaspard Darcy  
(1803-1858)  
(Engenheiro francês)

Logo, pode-se realizar experimentos impondo  $f$  em função de  $Re$  e  $\varepsilon/D$  e obter uma correlação empírica para a previsão do **fator de atrito de Darcy**

$$f = f\left(Re, \frac{\varepsilon}{D}\right)$$

- **Cyril F. Colebrook** propôs a conhecida “**Equação de Colebrook**” para a determinação do fator de atrito ( $f$ ) em função de  $Re$  e  $\varepsilon/D$  em uma tubulação para **escoamento turbulento**:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2,0 \log \left( \frac{\varepsilon/D}{3,7} + \frac{2,51}{Re \sqrt{f}} \right) \quad (\text{escoamento turbulento})$$



Cyril F. Colebrook  
(1910-1997)  
(Físico britânico)

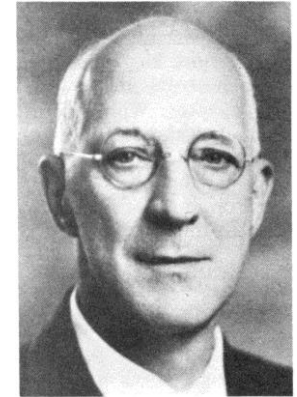
- Da definição do fator de atrito (Eq. 1) e da equação de distribuição de velocidade em escoamento laminar (**deduzida em aulas anteriores**), tem-se (**PROVAR!!!!**):

$$f = \frac{64}{Re} \quad (\text{escoamento laminar})$$

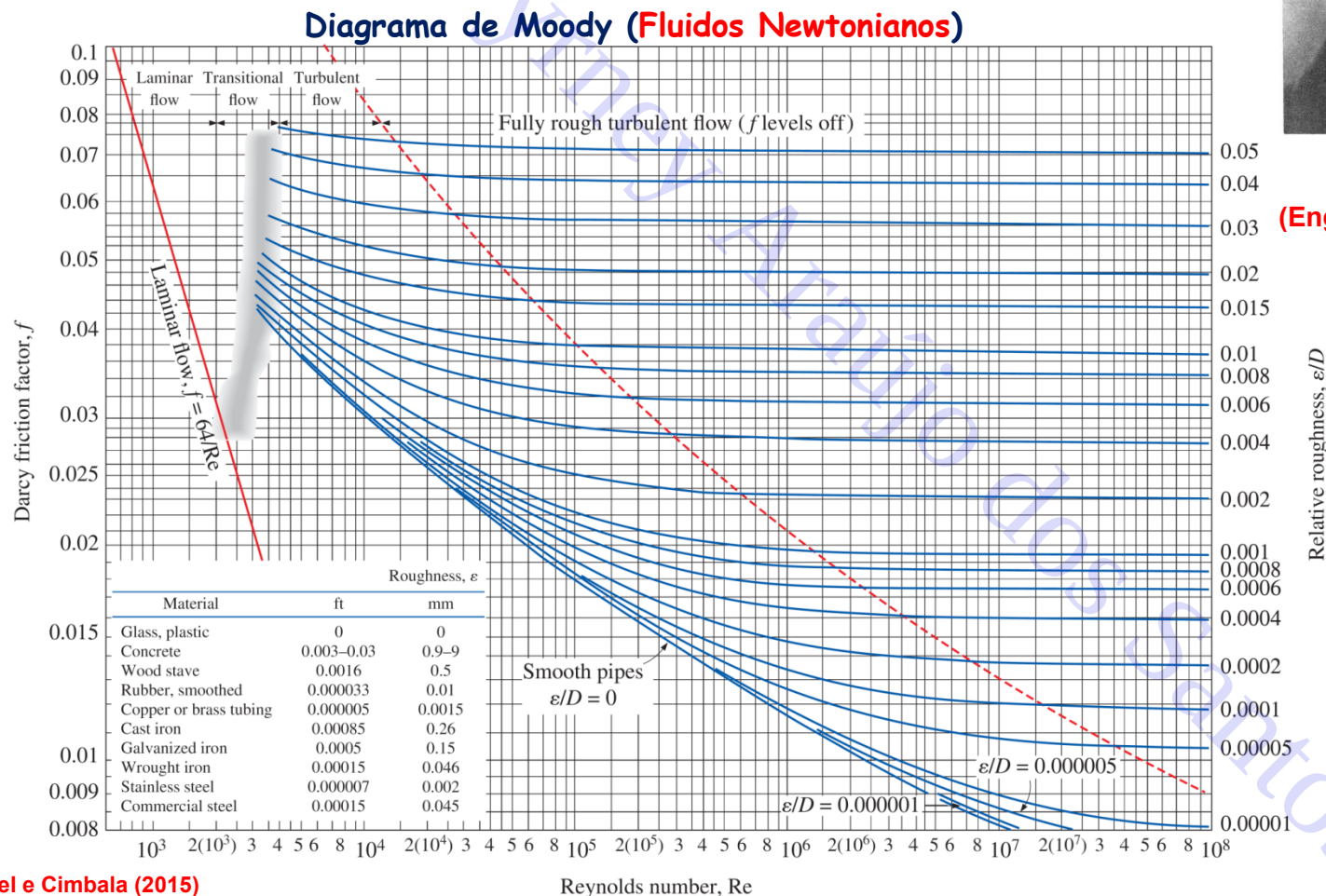
# 6 . Análise Dimensional e Similaridade

## 6.2 Teorema $\pi$ -Buckingham

- Lewis F. Moody** propôs a construção de um diagrama com base na equação de Colebrook (escoamento turbulento) e na equação do fator de atrito para um escoamento laminar, o famoso “**Diagrama de Moody**” que é o mais aceito e usado na engenharia (**somente para fluidos newtonianos!**).



**Lewis F. Moody**  
(1880-1953)  
(Engenheiro e professor norte americano)



# 6 . Análise Dimensional e Similaridade

## 6.2 Teorema $\pi$ -Buckingham

Além de poder ser determinado de **forma empírica** ou através do “**Diagrama de Moody**”, o fator de atrito também pode ser obtido de **forma teórica** quando associamos o fator de atrito com a tensão de cisalhamento na parede do tubo para escoamento laminar.

- Considere a distribuição de velocidade em uma tubulação (“isto foi deduzido anteriormente!!”):

$$V_z = \frac{(-\Delta P)}{4\mu L}(r^2 - R^2)$$

- A tensão viscosa na parede é dada pela lei de Navier-Stokes e, após a derivação da velocidade, tem-se:

$$\tau_w = \mu \left. \frac{dV_z}{dr} \right|_{r=R} \longrightarrow \tau_w = \frac{(-\Delta P)R}{2L}$$

- Vimos que o fator de atrito de Darcy ( $f$ ) pode ser representado pela (Eq. 1) abaixo e, após a substituição da tensão viscosa, tem-se:

$$f = \frac{(-\Delta P)D}{(\rho V^2/2)L} \longrightarrow f = \frac{8\tau_w}{\rho V^2}$$

A desvantagem da **determinação teórica** de  $f$  é que é necessário a determinação da **distribuição de velocidades** através de equações diferenciais para, após isto, avaliar o **tensor viscoso na parede do tubo**. Em muitos casos práticos (escoamento turbulento, etc.) a determinação teórica se torna **muito complexa!**

O fator de atrito de Darcy ( $f$ ) não deve ser confundido com o **fator de atrito de Fanning** ou **Coefficiente de atrito ( $C_f$ )** que é definido como:

(fator de atrito de Fanning)

$$C_f = \frac{2\tau_w}{\rho V^2} = \frac{f}{4}$$



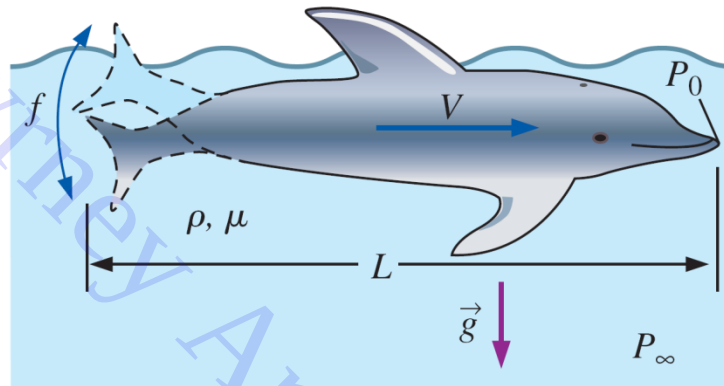
John Thomas Fanning  
 (1837-1911)  
 (Engenheiro e arquiteto norte americano)

# 6 . Análise Dimensional e Similaridade

## 6.3 Grupos Adimensionais Importantes na Mecânica dos Fluidos

As forças encontradas nos fluidos em escoamento incluem:

- (a) forças de inércia;
- (b) forças viscosas;
- (c) forças de pressão;
- (d) forças gravitacionais;
- (e) forças de compressibilidade



**Variáveis características em um problema geral de escoamento de fluido com superfície livre**

Fonte: Çengel e Cimbala (2015)

Desta forma pode-se comparar a intensidade relativa das várias forças em relação à **força de inércia** a qual é proporcional a  $\rho V^2 L^2$

A) **Força viscosa:**  $\tau A = \mu \frac{du}{dy} A \propto \mu \frac{V}{L} L^2 = \mu V L$  . Assim:  $\frac{\text{força viscosa}}{\text{força inercial}} \rightarrow \frac{\mu V L}{\rho V^2 L^2} = \frac{\mu}{\rho V L}$

Este parâmetro é tradicionalmente invertido para dar origem ao **número adimensional de Reynolds:**

$$Re = \frac{\rho V L}{\mu}$$



Osborne Reynolds  
 (1842 – 1912)  
 (Físico e engenheiro irlandês)

**Importância:** importante na classificação de escoamentos laminares e turbulentos.

# 6 . Análise Dimensional e Similaridade

## 6.3 Grupos Adimensionais Importantes na Mecânica dos Fluidos

B) Força de pressão:  $\Delta p A \propto \Delta p L^2$  . Assim:  $\frac{\text{força pressão}}{\text{força inercial}} \rightarrow \frac{\Delta p L^2}{\rho V^2 L^2} = \frac{\Delta p}{\rho V^2}$

Inserindo um fator de **1/2**, tem-se o **número adimensional de Euler**:

$$Eu = \frac{\Delta p}{\frac{1}{2} \rho V^2}$$



Leonhard Paul Euler  
(1707 – 1783)  
(Físico, matemático e  
astrônomo suíço)

**Importância:** importante em problemas que envolvem baixas pressões causando a formação de vapor (cavitação) em um líquido e em sistemas de separação utilizando ciclones e hidrociclones.

C) Força gravitacional:  $mg \propto g \rho L^3$  . Assim:  $\frac{\text{força gravidade}}{\text{força inercial}} \rightarrow \frac{g \rho L^3}{\rho V^2 L^2} = \frac{gL}{V^2}$

A raiz quadrada deste parâmetro dá origem ao **número adimensional de Froude**:

$$Fr = \frac{V}{\sqrt{gL}}$$



William Froude  
(1810 – 1879)  
(Engenheiro naval  
inglês)

**Importância:** importante em escoamentos com superfície livre, não tendo importância na ausência de superfície livre.



# 6 . Análise Dimensional e Similaridade

## 6.3 Grupos Adimensionais Importantes na Mecânica dos Fluidos

D) Força superficial:  $\sigma L$  . Assim:  $\frac{\text{força superficial}}{\text{força inercial}} \rightarrow \frac{\sigma L}{\rho V^2 L^2} = \frac{\sigma}{\rho V^2 L}$   $\sigma$  [N/m] é a tensão superficial

O inverso deste parâmetro dá origem ao **número adimensional de Weber**:

$$We = \frac{\rho V^2 L}{\sigma}$$



Moritz Weber  
(1871 – 1951)  
(Professor de mecânica alemão)

Importância: importante no estudo das interfaces gás-líquido ou líquido-líquido (escoamentos imiscíveis).

E) Força de compressibilidade:  $E_v A \propto E_v L^2$  . Assim:  $\frac{\text{força compressibilidade}}{\text{força inercial}} \rightarrow \frac{E_v L^2}{\rho V^2 L^2} = \frac{E_v}{\rho V^2}$   $E_v$  é o módulo de elasticidade

Define-se  $E_v = \rho c^2$

Logo, o inverso da raiz do parâmetro dá origem ao **número adimensional de Mach**:

$$Ma = \frac{V}{c}$$



Ernst Waldfried  
Josef Wenzel Mach  
(1838 – 1916)  
(Físico e filósofo austríaco)

Importância: importante quando as velocidades são próximas ou superiores à do som. Os efeitos de compressibilidade no interior de um fluido são desprezíveis quando **Ma < 0,3**.

# 6 . Análise Dimensional e Similaridade

## 6.4 Análise de Similaridade

**Comentário:** Muitas vezes o engenheiro precisa efetuar experimentos num equipamento mas não pode fazê-lo em escala industrial. A melhor solução subentende a construção de um modelo que é um equipamento em escala reduzida similar ao industrial.

Para assegurar a semelhança entre os escoamentos no **modelo** e no **protótipo** deve-se ter:

**A) Semelhança Geométrica:** o modelo (**m**) deve ter dimensões perfeitamente proporcionais às do protótipo (**p**) (escala industrial), tal proporção é dita fator de escala ( **$\lambda$** ), definido por

$$\lambda = \frac{L_m}{L_p} = \frac{D_m}{D_p} = \frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_p}$$

**B) Semelhança Dinâmica:** as forças envolvidas nos experimentos de laboratório (**modelo**) também devem ser proporcionais às que existirão no protótipo. Logo, os adimensionais relevantes ao problema devem ser iguais, isto é

$$Re_m = Re_p \quad We_m = We_p \quad Ma_m = Ma_p$$

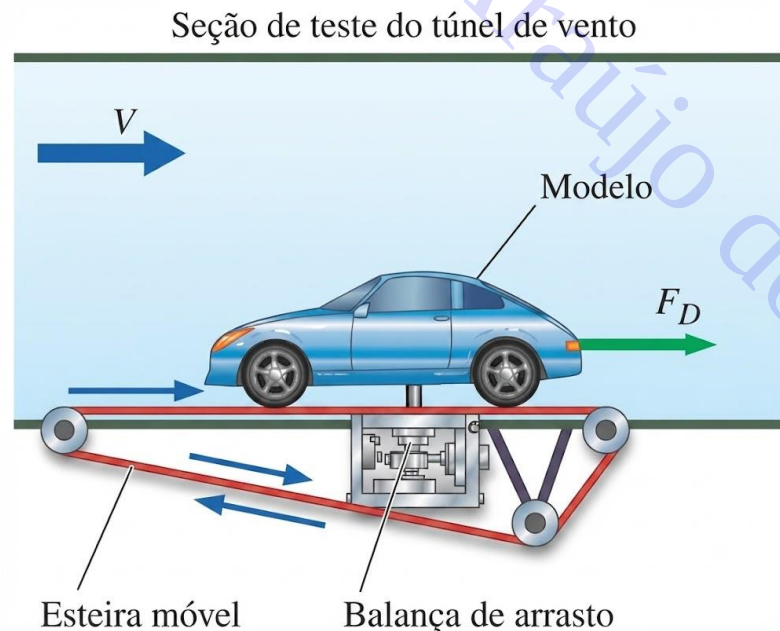
$$Fr_m = Fr_p \quad Eu_m = Eu_p$$

## 6 . Análise Dimensional e Similaridade

**Exercício Proposto 9:** O arrasto aerodinâmico de um novo automóvel esportivo deve ser previsto a uma velocidade de **22,35 m/s** em ar com temperatura de **25°C**. Os engenheiros automotivos criaram um modelo em escala um para cinco do automóvel para testá-lo em um túnel de vento. É inverno e o túnel de vento está localizado em um prédio sem aquecimento. A temperatura do ar no túnel de vento é de apenas **5°C**. Determine a velocidade com a qual os engenheiros devem executar o túnel de vento para atingir a similaridade entre o modelo e o protótipo.

**Dados:** ar a  $T = 25^\circ\text{C}$  implica  $\rho = 1,184 \text{ kg/m}^3$  e  $\mu = 1,849 \times 10^{-5} \text{ kg/(m.s)}$

ar a  $T = 5^\circ\text{C}$  implica  $\rho = 1,269 \text{ kg/m}^3$  e  $\mu = 1,754 \times 10^{-5} \text{ kg/(m.s)}$





# Bibliografia

**BIRD, R.B.; STEWART, W.E. e; LIGHTFOOT, E.N. Fenômenos de transporte, 2ª ed., LTC, 2004.**

**ÇENGEL, Y.A e CIMBALA, J.M.; Mecânica dos fluidos, McGraw Hill, 3ª edição, 2015.**

**WHITE, F. M. Mecânica dos Fluidos. 6ª edição. MCGRAW-HILL, 2011.**