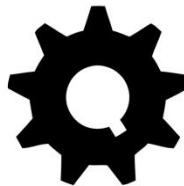




Instituto de Química  
IQ - UFG



**ENGENHARIA QUÍMICA**  
Universidade Federal de Goiás

# Equação da Conservação da Energia e Condições de Contorno e Inicial

Professor Dyrney Araújo dos Santos  
**Universidade Federal de Goiás**  
**Curso: Graduação em Engenharia Química**  
**Disciplina: Fenômenos de Transporte 2**  
site: [www.dyrney.com](http://www.dyrney.com)

## 2 . Equação da Energia Térmica

### Objetivos

- Determinar o campo de temperaturas em um meio resultante das condições impostas em suas fronteiras (condições de contorno).
- A partir da distribuição de temperaturas, determinar o fluxo de calor por condução em qualquer ponto do meio ou na sua superfície através da lei de Fourier

### Algumas aplicações práticas

- Averiguar a integridade estrutural de um sólido através da determinação de tensões, expansões e deflexões térmicas;
- Otimizar a espessura de um material isolante em tubulações, etc.;
- Projeto de aletas para aumentar a transferência de calor por convecção para um fluido adjacente, projeto de trocadores de calor, etc.

## 2 . Equação da Energia Térmica

### 2.1 Equação Geral da Conservação da Energia

A variação da energia total no interior de um **Volume de Controle (“VC”)** infinitesimal é igual a quantidade de energia que entra no “**VC**” através da sua **Superfície de Controle (“SC”)** em todas as suas formas (**calor, trabalho e “massa”**), menos a quantidade de energia que sai do “**VC**” através da sua Superfície de Controle (“**SC**”) em todas as suas formas (**calor, trabalho e “massa”**) mais ou menos a quantidade de energia gerada ou consumida no interior do “**VC**”. Em termos de taxa (energia por unidade de tempo), tem-se:

$$\left( \begin{array}{l} \text{A taxa de} \\ \text{variação no} \\ \text{tempo do conteúdo} \\ \text{de energia no "VC"} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{l} \text{A taxa líquida} \\ \text{de transferência} \\ \text{de energia para} \\ \text{um "VC" por} \\ \text{transferência} \\ \text{de Calor e Trabalho} \end{array} \right) + \left( \begin{array}{l} \text{A taxa de escoamento} \\ \text{líquida da energia} \\ \text{para fora da "SC"} \\ \text{por escoamento} \\ \text{de massa} \end{array} \right) \pm \left( \begin{array}{l} \text{A taxa de} \\ \text{energia gerada} \\ \text{ou consumida} \\ \text{no interior} \\ \text{do "VC"} \end{array} \right)$$

**OU**

$$E_{\text{acumulada}} = (E_{\text{entra}} - E_{\text{sai}})_{\text{por calor}} + (E_{\text{entra}} - E_{\text{sai}})_{\text{por trabalho}} + (E_{\text{entra}} - E_{\text{sai}})_{\text{por massa}} \pm E_{\text{gerada}}$$

**Sendo E = energia total por unidade de tempo (taxa)**

## 2 . Equação da Energia Térmica

### 2.1 Equação Geral da Conservação da Energia

- **Acumulo:** O termo de acúmulo de energia no “VC” pode ser descrito em termos da energia total do escoamento ( $e$ ) por unidade de massa ( $e_{\text{escoamento}} = \text{entalpia/massa} + \text{energia\_cinética/massa} + \text{energia\_potencial/massa}$ ).

Em coordenadas cartesianas, cujo volume do elemento infinitesimal é  $dxdydz$ , tem-se:

$$E_{\text{acumulada}} = \rho \frac{\partial e_{\text{escoamento}}}{\partial t} dxdydz \longrightarrow E_{\text{acumulada}} = \rho \frac{\partial}{\partial t} \left( \hat{h} + \frac{1}{2} \vec{V}^2 + gz \right) dxdydz$$

**Sendo:**  $\hat{h}$  entalpia específica (por unidade de massa)

$1/2 \vec{V}^2$  energia cinética específica (por unidade de massa)

$gz$  energia potencial específica (por unidade de massa)

Desprezando as energias cinética e potencial frente à entalpia e considerando  $\rho$  e  $c_p$  constantes, tem-se que  $e_{\text{escoamento}} = \hat{h} \approx c_p T$ . Logo:

$$E_{\text{acumulada}} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} dxdydz$$

## 2 . Equação da Energia Térmica

### 2.1 Equação Geral da Conservação da Energia

- Por Calor e Massa:** As transferências de energia por calor (**condução**) e por fluxo de massa (**advecção**)

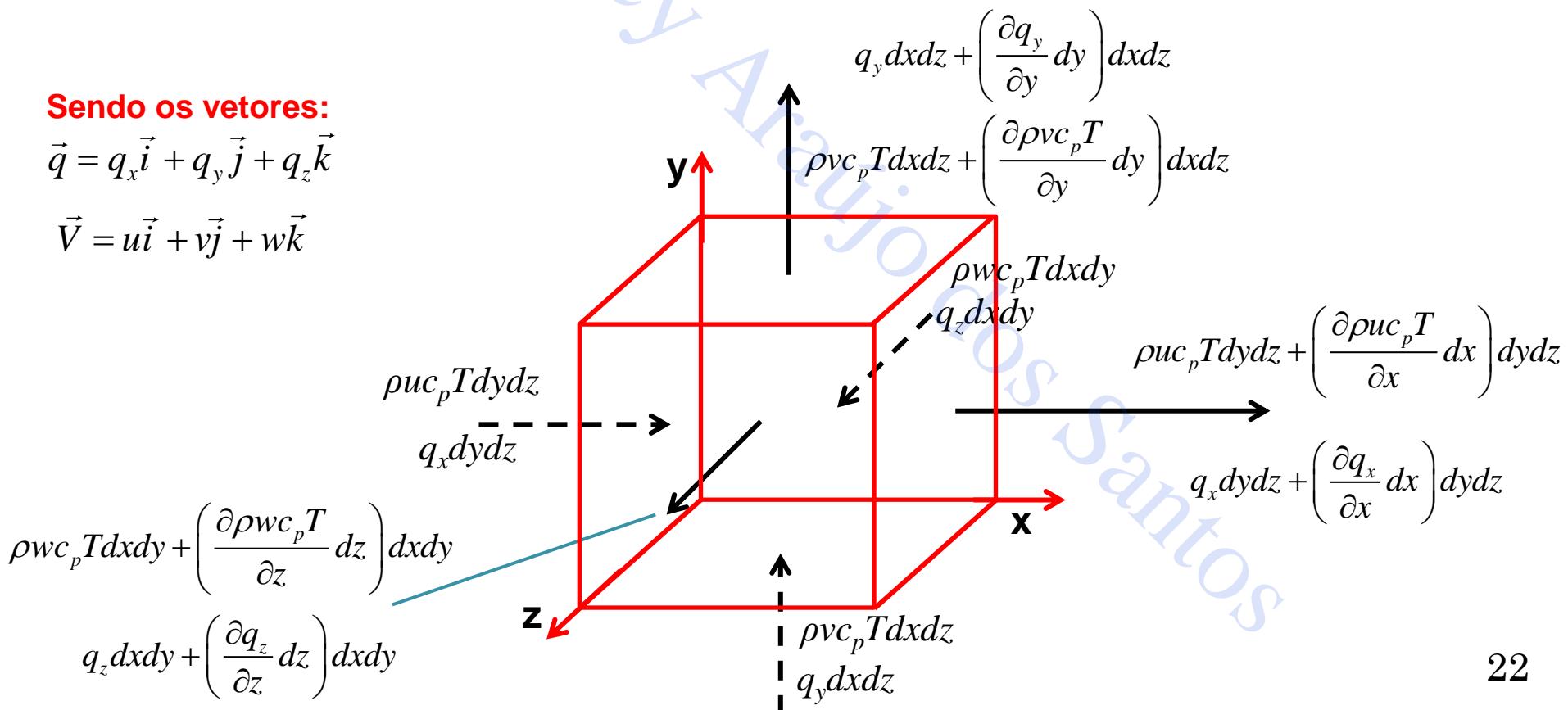
$$(E_{\text{entra}} - E_{\text{sai}})_{\text{por calor}} \text{ e } (E_{\text{entra}} - E_{\text{sai}})_{\text{por massa}}$$

podem ser representadas por meio de um elemento infinitesimal (**diferencial**) em coordenadas cartesianas (**dx, dy, dz**), como abaixo, sendo  $q_x$ ,  $q_y$  e  $q_z$  as componentes do fluxo condutivo de calor e  $u$ ,  $v$  e  $w$  as componentes do vetor velocidade do fluido, nas direções **x**, **y** e **z**, respectivamente:

Sendo os vetores:

$$\vec{q} = q_x \vec{i} + q_y \vec{j} + q_z \vec{k}$$

$$\vec{V} = u \vec{i} + v \vec{j} + w \vec{k}$$



## 2 . Equação da Energia Térmica

### 2.1 Equação Geral da Conservação da Energia

- Por Calor e Massa: Transferências de energia por calor (**condução**) e por fluxo de massa (**advecção**)

**Por Calor:** substituindo os respectivos termos de entrada e saída, a transferência de energia por calor (**condução**) torna-se:

$$(E_{\text{entra}} - E_{\text{sai}})_{\text{por calor}} = q_x dydz + q_y dxdz + q_z dx dy - \left( q_x dydz + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx dy dz \right) - \left( q_y dxdz + \frac{\partial q_y}{\partial y} dy dx dz \right) - \left( q_z dx dy + \frac{\partial q_z}{\partial z} dz dx dy \right)$$

Após as simplificações, tem-se:

$$(E_{\text{entra}} - E_{\text{sai}})_{\text{por calor}} = -\frac{\partial q_x}{\partial x} dx dy dz - \frac{\partial q_y}{\partial y} dy dx dz - \frac{\partial q_z}{\partial z} dz dx dy$$

**Por fluxo de massa:** substituindo os respectivos termos de entrada e saída e considerando  $\rho$  e  $c_p$  constantes, a transferência de energia por massa (**advecção**) torna-se:

$$(E_{\text{entra}} - E_{\text{sai}})_{\text{por massa}} = \rho u c_p T dy dz + \rho v c_p T dx dz + \rho w c_p T dx dy - \left( \rho u c_p T dy dz + \rho c_p \frac{\partial u T}{\partial x} dx dy dz \right) - \left( \rho v c_p T dx dz + \rho c_p \frac{\partial v T}{\partial y} dy dx dz \right) - \left( \rho w c_p T dx dy + \rho c_p \frac{\partial w T}{\partial z} dz dx dy \right)$$

## 2 . Equação da Energia Térmica

### 2.1 Equação Geral da Conservação da Energia

- Por Calor e Massa: Transferências de energia por calor (condução) e por fluxo de massa (advecção)

Após as simplificações, tem-se:

$$(E_{\text{entra}} - E_{\text{sai}})_{\text{por massa}} = -\rho c_p \frac{\partial u T}{\partial x} dx dy dz - \rho c_p \frac{\partial v T}{\partial y} dy dx dz - \rho c_p \frac{\partial w T}{\partial z} dz dx dy$$

Aplicando a regra da cadeia e agrupando os termos em comum, tem-se:

$$(E_{\text{entra}} - E_{\text{sai}})_{\text{por massa}} = -\rho c_p \left( u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} \right) dx dy dz - \rho c_p T \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) dy dx dz$$

**OBS.:** Considerando o escoamento incompressível, a equação da continuidade (conservação de massa) é dada conforme abaixo:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

Logo, após a substituição da equação da continuidade, tem-se:

$$(E_{\text{entra}} - E_{\text{sai}})_{\text{por massa}} = -\rho c_p \left( u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} \right) dx dy dz$$

## 2 . Equação da Energia Térmica

### 2.1 Equação Geral da Conservação da Energia

- Por Trabalho: este termo envolve o trabalho de eixo, o trabalho realizado pelas forças de corpo (gravitacional, elétrico e magnético) e o trabalho realizado pelas forças de superfície (**força de pressão** e **forças viscosas**)

**OBS.:** O trabalho de eixo será desconsiderado, visto que a análise feita aqui é diferencial.

**OBS.:** O trabalho devido às forças de corpo é calculado multiplicando-se essa força pela velocidade em sua direção e pelo volume do elemento fluido. O mesmo será aqui desconsiderado, sendo importante apenas para efeitos significativos gravitacionais, elétricos ou magnéticos.

**OBS.:** O trabalho devido à pressão (trabalho do escoamento) já foi contabilizado anteriormente, utilizando a entalpia em vez da energia interna.

Logo, o trabalho líquido devido às forças viscosas ou tensões viscosas, o qual é calculado multiplicando-se a componente da tensão pelo seu correspondente componente de velocidade e pela área da face do elemento, considerando a viscosidade dinâmica ( $\mu$ ) constante e o fluido sendo newtoniano, é dado conforme abaixo (**detalhes sobre a dedução podem ser encontradas em Welty et al., 2017**):

$$(E_{\text{entra}} - E_{\text{sai}})_{\text{por trabalho}} = \mu \Phi dx dy dz$$

Sendo  $\Phi$  a função de dissipação viscosa, dada abaixo:

$$\Phi = 2 \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] + \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right]$$

**OBS.:** Observe que  $\Phi$  é sempre positivo e tem o efeito de aumentar a temperatura do fluido em virtude da dissipação da energia cinética em térmica. Este termo é importante apenas para escoamento de fluidos a altas velocidades.

# 2 . Equação da Energia Térmica

## 2.1 Equação Geral da Conservação da Energia

- Energia gerada ou consumida:** No interior do volume de controle “VC” pode haver, também, um termo de fonte de energia associado à taxa de geração ou consumo de energia térmica (**reação química, dissipação de energia elétrica ou nuclear, etc.**).

Este termo é representado por:

$$E_{\text{gerada}} = \dot{Q} dxdydz$$

sendo  $\dot{Q}$  a taxa na qual a energia é gerada ou consumida por unidade de volume do meio (**W/m<sup>3</sup>**).

Finalmente, retornando à **Equação do Balanço de Energia** no “VC”:

$$E_{\text{acumulada}} = (E_{\text{entra}} - E_{\text{sai}})_{\text{por calor}} + (E_{\text{entra}} - E_{\text{sai}})_{\text{por trabalho}} + (E_{\text{entra}} - E_{\text{sai}})_{\text{por massa}} \pm E_{\text{gerada}}$$

Substituindo os termos, agrupando aqueles em comum e dividindo tudo pelo volume infinitesimal **dxdydz**, tem-se:

$$\rho c_p \left( \underbrace{\frac{\partial T}{\partial t}}_{\text{Termo transiente (temporal)}} + u \underbrace{\frac{\partial T}{\partial x}}_{\text{Termo Advectivo (transporte de energia devido ao movimento do fluido)}} + v \underbrace{\frac{\partial T}{\partial y}}_{\text{Termo condutivo (transporte de energia devido ao gradiente de temperatura)}} + w \underbrace{\frac{\partial T}{\partial z}}_{\text{Termo dissipativo viscoso}} \right) = - \underbrace{\frac{\partial q_x}{\partial x}}_{\text{Termo de geração ou consumo}} - \underbrace{\frac{\partial q_y}{\partial y}}_{\text{Termo de geração ou consumo}} - \underbrace{\frac{\partial q_z}{\partial z}}_{\text{Termo de geração ou consumo}} + \mu \Phi \pm \dot{Q}$$

# 2 . Equação da Energia Térmica

## 2.1 Equação Geral da Conservação da Energia

A Equação de Fourier pode ser escrita para cada componente do fluxo condutivo de calor ( $q_x$ ,  $q_y$  e  $q_z$ ). Considerando-se o material **isotrópico** (as propriedades não variam com a direção, ou seja,  $k_x = k_y = k_z = k$ ), tem-se:

$$\begin{array}{l} \text{direção x} \longrightarrow q_x = -k \frac{\partial T}{\partial x} \\ \text{direção y} \longrightarrow q_y = -k \frac{\partial T}{\partial y} \\ \text{direção z} \longrightarrow q_z = -k \frac{\partial T}{\partial z} \end{array}$$

Finalmente, substituindo os termos de fluxo na equação anterior, tem-se, em coordenadas cartesianas:

$$\rho c_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \mu \Phi \pm \dot{Q}$$

Na forma compacta (**utilizando o operador nabla**), tem-se:

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = \nabla \cdot (k \nabla T) + \mu \Phi \pm \dot{Q}$$

**OBS.:** o termo  $D/Dt$  é denominado de **derivada substantiva** ou **derivada material**

# 2 . Equação da Energia Térmica

## 2.2 Casos Especiais: Simplificações da Equação da Energia

**OBS.:** No caso da transferência de calor em um sólido ou um fluido em repouso, todos os termos que envolvem a velocidade são desprezados, incluindo o termo de dissipação viscosa e o termo advectivo dentro da derivada substantiva. Logo, neste caso, tem-se em coordenadas cartesianas:

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial T}{\partial z} \right) \pm \dot{Q}$$

ou

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (k \nabla T) \pm \dot{Q}$$

**OBS.:** A equação acima é conhecida como “Equação da Difusão/Condução Térmica” e será utilizada aqui em problemas de difusão/condução pura de calor. Seguem abaixo outras simplificações desta equação.

### (a) Condutividade térmica constante ( $k = \text{cte}$ )

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \pm \frac{\dot{Q}}{k}$$

ou

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla^2 T \pm \frac{\dot{Q}}{k}$$

Sendo  $\alpha = k / \rho c_p$  a difusividade térmica, que representa a velocidade com que o calor se difunde por meio de um material

### (b) Regime em Estado Estacionário e condutividade térmica constante ( $k = \text{cte}$ )

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \pm \frac{\dot{Q}}{k} = 0$$

ou

$$\nabla^2 T \pm \frac{\dot{Q}}{k} = 0$$

# 2 . Equação da Energia Térmica

## 2.2 Casos Especiais: Simplificações da Equação da Energia

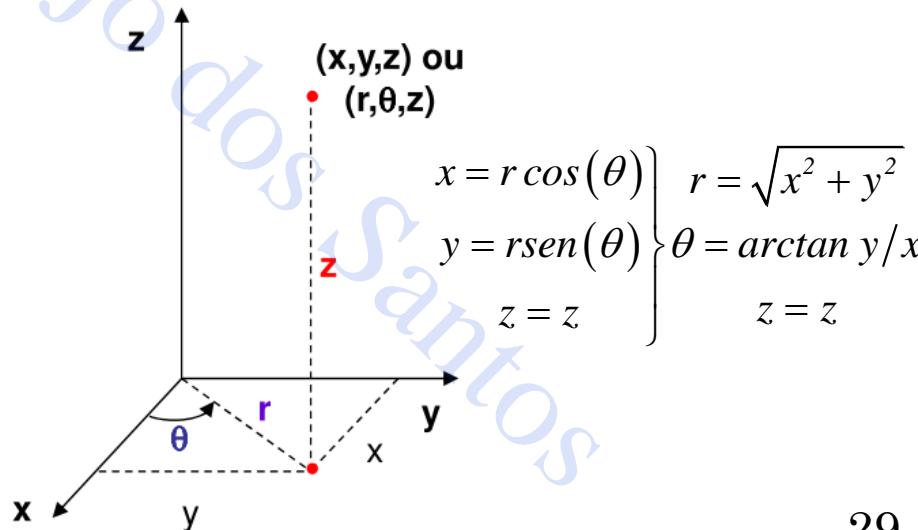
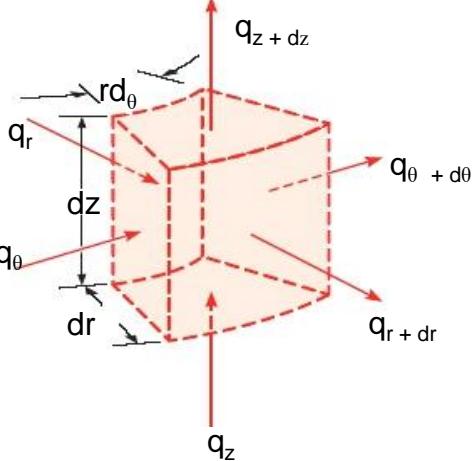
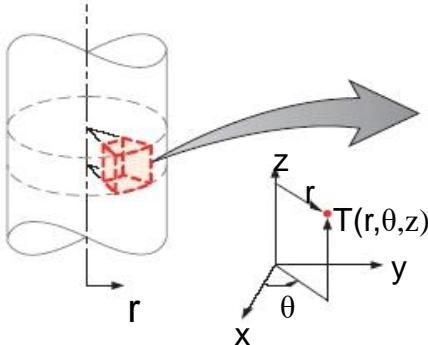
(d) Regime em Estado Estacionário, condutividade térmica constante ( $k = \text{cte}$ ), unidimensional (por exemplo, direção x apenas) e sem geração/consumo de energia

$$k \frac{d}{dx} \left( \frac{dT}{dx} \right) = 0 \quad \text{ou} \quad \nabla^2 T = 0$$

## 2.3 Equação da Difusão/Condução Térmica em diferentes Sistemas de Coordenadas

### (a) Coordenadas Cilíndricas

Volume de controle diferencial,  $rd\theta dr dz$ , para análise da condução em coordenadas cilíndricas ( $r, \theta, z$ ).



Fonte (modificado): Incropera e Dewitt (2008)

## 2 . Equação da Energia Térmica

### 2.3 Equação da Difusão/Condução Térmica em diferentes Sistemas de Coordenadas

#### (a) Coordenadas Cilíndricas

***Para Recordar:*** Gradiente em coordenadas cilíndricas

- O gradiente ( $\nabla$ ) em coordenadas cilíndricas de uma propriedade escalar qualquer “A” é dado por:

$$\nabla A = \frac{\partial A}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial A}{\partial z} \vec{e}_z$$

- Logo, a forma geral do fluxo difusivo (Lei de Fourier) e as suas componentes nas direções radial (r), circunferencial (θ) e axial (z) são, respectivamente:

$$\vec{q} = -k \nabla T = -k \left( \frac{\partial T}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial T}{\partial z} \vec{e}_z \right)$$

$q_r = -k \frac{\partial T}{\partial r}$   
 $q_\theta = -\frac{k}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta}$   
 $q_z = -k \frac{\partial T}{\partial z}$

## 2 . Equação da Energia Térmica

### 2.3 Equação da Difusão/Condução Térmica em diferentes Sistemas de Coordenadas

#### (a) Coordenadas Cilíndricas

**Para Recordar:** Divergente em coordenadas cilíndricas

- O divergente ( $\nabla.$ ) em coordenadas cilíndricas de uma propriedade vetorial qualquer “B” é dado por:

$$\nabla \cdot \vec{B} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial B_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

Retornando à Equação da Difusão Térmica na forma geral:

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (k \nabla T) \pm \dot{Q}$$

Após as substituições dos termos gradiente e divergente, tem-se:

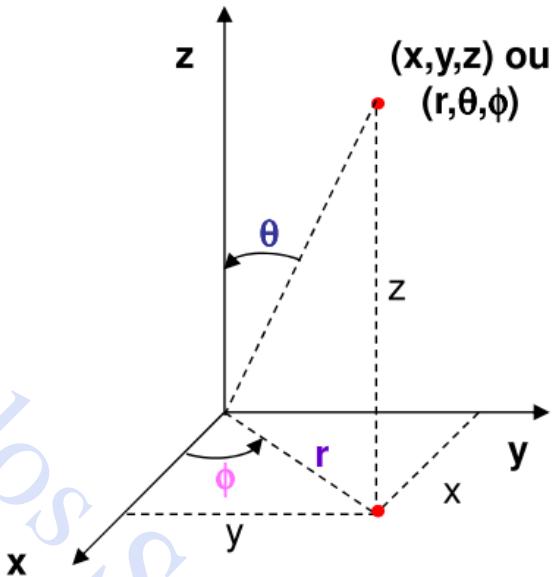
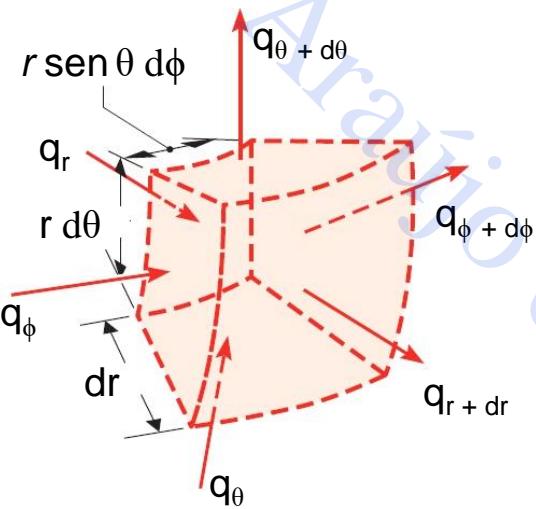
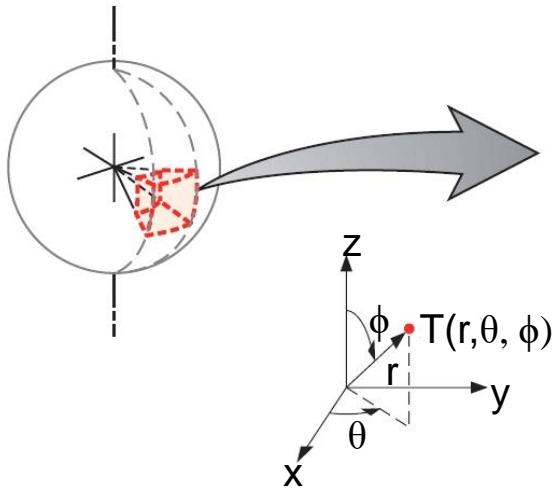
$$\boxed{\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( kr \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( k \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial T}{\partial z} \right) \pm \dot{Q}}$$

## 2 . Equação da Energia Térmica

### 2.3 Equação da Difusão/Condução Térmica em diferentes Sistemas de Coordenadas

#### (b) Coordenadas Esféricas

Volume de controle diferencial,  $dr \cdot r \sin(\theta) d\phi \cdot r d\theta$ , para análise da condução em coordenadas esféricas ( $r, \theta, \phi$ ).



$$\left. \begin{array}{l} x = r \sin(\theta) \cos(\phi) \\ y = r \sin(\theta) \sin(\phi) \\ z = r \cos(\theta) \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \arctan(\sqrt{x^2 + y^2} / z) \\ z = \arctan y / x \end{array} \right\}$$

Fonte: Incropera e Dewitt (2008)

## 2 . Equação da Energia Térmica

### 2.3 Equação da Difusão Térmica em diferentes Sistemas de Coordenadas

#### (b) Coordenadas Esféricas

**Para Recordar:** Gradiente em coordenadas esféricas

- O gradiente ( $\nabla$ ) em coordenadas esféricas de uma propriedade escalar qualquer “A” é dado por:

$$\nabla A = \frac{\partial A}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A}{\partial \phi} \vec{e}_\phi$$

- Logo, a forma geral do fluxo (**Lei de Fourier**) e as suas componentes nas direções radial (**r**), circunferencial (**θ**) e azimutal (**φ**) são, respectivamente:

$$\vec{q} = -k \nabla T = -k \left( \frac{\partial T}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial T}{\partial \phi} \vec{e}_\phi \right)$$

$$\left. \begin{array}{l} q_r = -k \frac{\partial T}{\partial r} \\ q_\theta = -\frac{k}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \\ q_\phi = -\frac{k}{r \sin \theta} \frac{\partial T}{\partial \phi} \end{array} \right\}$$

## 2 . Equação da Energia Térmica

### 2.3 Equação da Difusão Térmica em diferentes Sistemas de Coordenadas

#### (b) Coordenadas Esféricas

**Para Recordar:** Divergente em coordenadas esféricas

- O divergente ( $\nabla.$ ) em coordenadas esféricas de uma propriedade vetorial qualquer “B” é dado por:

$$\nabla \cdot \vec{B} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 B_r) + \frac{1}{rsen\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (sen\theta B_\theta) + \frac{1}{rsen\theta} \frac{\partial B_\phi}{\partial \phi}$$

Retornando à Equação da Difusão Térmica na forma geral é dada por:

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (k \nabla T) \pm \dot{Q}$$

Após as substituições dos termos gradiente e divergente, tem-se:

$$\boxed{\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( kr^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 sen\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( k sen\theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 sen^2\theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( k \frac{\partial T}{\partial \phi} \right) \pm \dot{Q}}$$

## 2 . Equação da Energia Térmica

### 2.4 Condições de Contorno e Condição Inicial

#### (a) Condição Inicial

Caso o sistema for transiente, a solução depende das condições existentes no meio em algum instante de tempo inicial

**OBS.:** Visto que a **Equação da Difusão/Condução Térmica** é de primeira ordem em relação ao tempo, apenas uma condição deve ser especificada, podendo ser uma função do espaço ( $T(x, y, z)$ ) ou uma constante ( $T_0$ ).

**Exemplo:**  $T(x, y, z, t = 0) = T_0$    ou    $T(x, y, z, t = 0) = T_0(x, y, z)$

#### (b) Condição de Contorno

Caso exista um gradiente de temperaturas no meio, a solução depende, também, das condições físicas existentes nas fronteiras deste meio

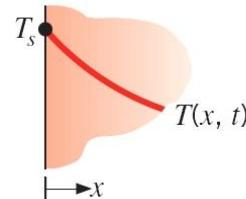
**OBS.:** Visto que a **Equação da Difusão/Condução Térmica** é de segunda ordem em relação às coordenadas espaciais, duas condições de contorno devem ser fornecidas para cada coordenada espacial

## 2 . Equação da Energia Térmica

Tipos de condições de contorno para a Equação da Difusão/Condução Térmica (Ex: em  $x = 0$ )

1. Temperatura na superfície constante (**Condição de Dirichlet**)

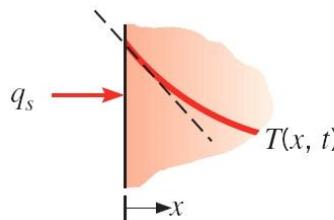
$$T(0, t) = T_s$$



2. Fluxo térmico na superfície (**Condição de Neumann**)

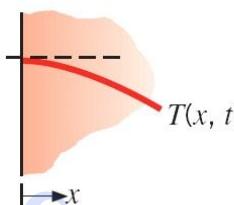
- (a) Fluxo térmico constante na superfície

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = q_s$$



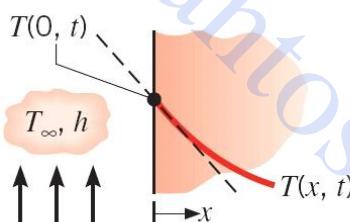
- (b) Superfície adiabática ou isolada termicamente

$$\frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0$$



3. Condição de convecção na superfície (**Condição de Robin**)

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = h [T_\infty - T(0, t)]$$



## 2 . Equação da Energia Térmica

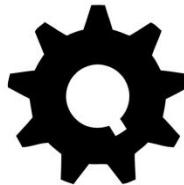
**Exercício Proposto 4:** A distribuição de temperaturas ao longo de uma parede com espessura de 1 m, em determinado instante de tempo, é dada por  $T(x) = 900 - 300x - 50x^2$ , sendo  $T$  em  $^{\circ}\text{C}$  e  $x$  em m. A parede possui uma área da seção transversal de  $10\text{m}^2$  e uma taxa de geração de calor de  $1000\text{W/m}^3$ . As propriedades físicas da parede são:  $\rho = 1600\text{kg/m}^3$ ,  $k = 40\text{W/(m.K)}$  e  $c_p = 4\text{kJ/(kg.K)}$ . Determine: (a) As taxas de transferência de calor que entra na parede ( $x = 0$ ) e que deixa a parede ( $x = 1 \text{ m}$ ); (b) A taxa de variação da energia acumulada na parede; (c) A taxa de variação da temperatura (em relação ao tempo) nas posições  $x = 0; 0,25$  e  $0,5 \text{ m}$ .

# Bibliografia

**INCROPERA, F.P. e DEWITT, D.P.** *Fundamentos de transferência de calor e massa*, 6<sup>a</sup> ed., LTC, 2008.

**ÇENGEL, Y.A e GHAJAR, A.J.**; *Transferência de calor e massa*, McGraw Hill, 4<sup>a</sup> edição, 2012.

**WELTY, J. R.; RORRER, G. L.; FOSTER, D.G.** *Fundamentos de Transferência de Momento, de Calor e de Massa*; tradução e revisão técnica Verônica Calado, 6. ed., Rio de Janeiro: LTC, 2017.



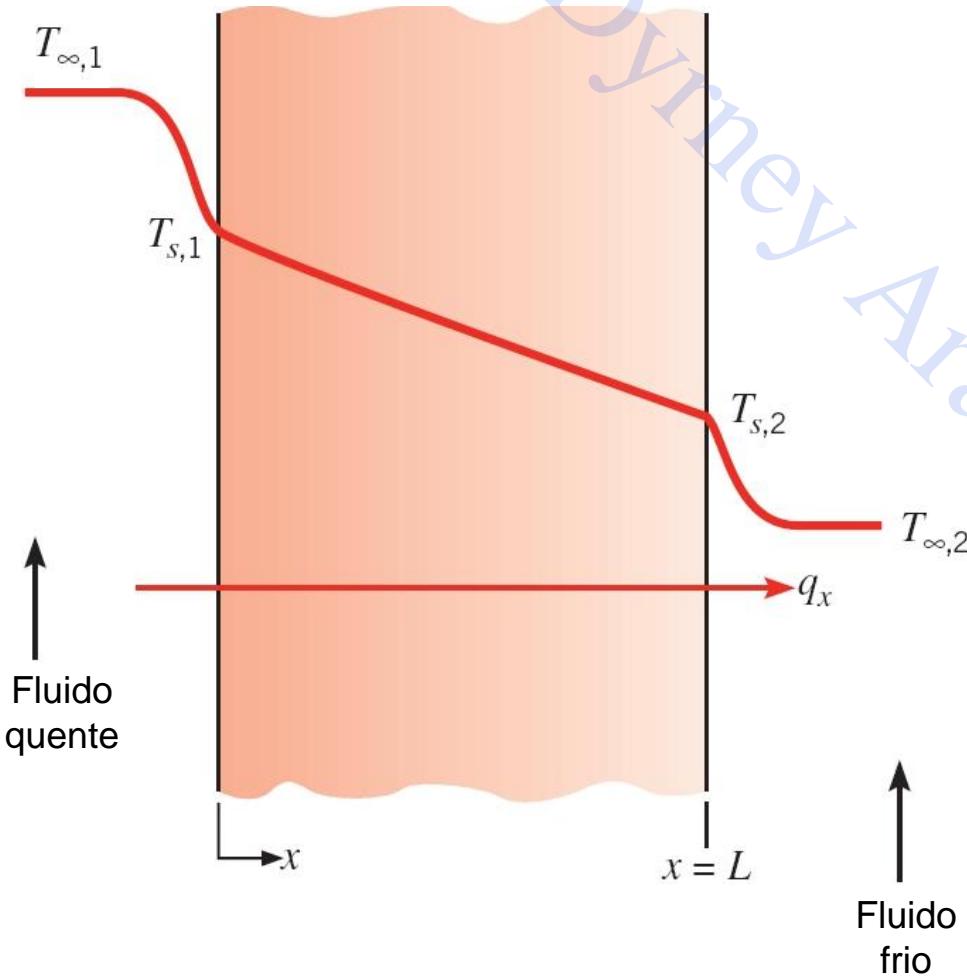
# Condução Unidimensional - Regime Estacionário e sem Geração de Energia

## Paredes Planas e Sistemas Radiais

Professor Dyrney Araújo dos Santos  
**Universidade Federal de Goiás**  
**Curso: Graduação em Engenharia Química**  
**Disciplina: Fenômenos de Transporte 2**  
site: [www.dyrney.com](http://www.dyrney.com)

# 3 . Condução Unidimensional sem Geração

## 3.1 Parede plana, sem geração interna de energia térmica, estado estacionário e unidimensional



### Hipóteses:

- Placa com pequena espessura: transferência preferencialmente na direção  $x$ .
- Transferência de calor em regime estacionário: temperatura independe do tempo, logo,  $T(x)$
- Propriedades físicas do material constantes:  $k = \text{cte}$

### 3 . Condução Unidimensional sem Geração

#### 3.1 Parede plana, sem geração interna de energia térmica, estado estacionário e unidimensional

Analisando, primeiramente, as condições no interior da parede, tem-se a seguinte forma geral da **Equação da Difusão Térmica em coordenadas cartesianas:**

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial T}{\partial z} \right) \pm \dot{Q}$$

regime estacionário

unidimensional

sem geração de energia

Após as devidas simplificações, tem-se:

$$\frac{d}{dx} \left( k \frac{dT}{dx} \right) = 0 \longrightarrow \frac{dq_x}{dx} = 0 \longrightarrow \boxed{\text{Fluxo térmico constante na direção "x"}}$$

Considerando  **$k = \text{cte}$**  e integrando uma vez, tem-se:

$$\int \frac{d}{dx} \left( \frac{dT}{dx} \right) dx = \int 0 dx \longrightarrow \frac{dT}{dx} = C_1$$

### 3 . Condução Unidimensional sem Geração

3.1 Parede plana, sem geração interna de energia térmica, estado estacionário e unidimensional

Integrando-a novamente:

$$\int \frac{dT}{dx} dx = \int C_1 dx \longrightarrow T = C_1 x + C_2$$

Sujeito às seguintes condições de contorno:  $\begin{cases} T(x=0) = T_{s,1} \\ T(x=L) = T_{s,2} \end{cases}$

Substituindo a condição em  $x = 0$ , tem-se:

$$T_{s,1} = C_1 0 + C_2 \longrightarrow C_2 = T_{s,1}$$

Substituindo a condição em  $x = L$ , tem-se:

$$T_{s,2} = C_1 L + C_2 = C_1 L + T_{s,1} \longrightarrow C_1 = \frac{T_{s,2} - T_{s,1}}{L}$$

Finalmente, substituindo  $C_1$  e  $C_2$  na solução geral, a distribuição de temperaturas é então:

$$T = (T_{s,2} - T_{s,1}) \frac{x}{L} + T_{s,1}$$

**OBS.:** Para a condução unidimensional em regime estacionário em uma parede plana sem geração de calor e condutividade térmica constante, a temperatura varia linearmente com  $x$ .

### 3 . Condução Unidimensional sem Geração

#### 3.1 Parede plana, sem geração interna de energia térmica, estado estacionário e unidimensional

Agora que se tem a distribuição de temperaturas, pode-se utilizar a **Lei de Fourier** para a determinação da taxa de transferência de calor por condução.

$$Q_x = -kA \frac{dT}{dx} \longrightarrow Q_x = \frac{kA}{L} (T_{s,1} - T_{s,2})$$

Rearranjando:

$$Q_x = \frac{(T_{s,1} - T_{s,2})}{\frac{L}{kA}}$$

**OBS.:** Nota-se uma analogia entre as difusões de calor e de carga (**Lei de Ohm**). Da mesma maneira que uma resistência elétrica está associada à condução de eletricidade, uma resistência térmica pode ser associada à condução de calor.

$$\text{corrente elétrica} = \frac{\text{diferença de potencial elétrico}}{\text{resistência elétrica}}$$

### 3 . Condução Unidimensional sem Geração

#### 3.1 Parede plana, sem geração interna de energia térmica, estado estacionário e unidimensional

Desta forma, a resistência térmica na condução em uma parede plana é:

$$R_{term,cond} = \frac{L}{kA}$$

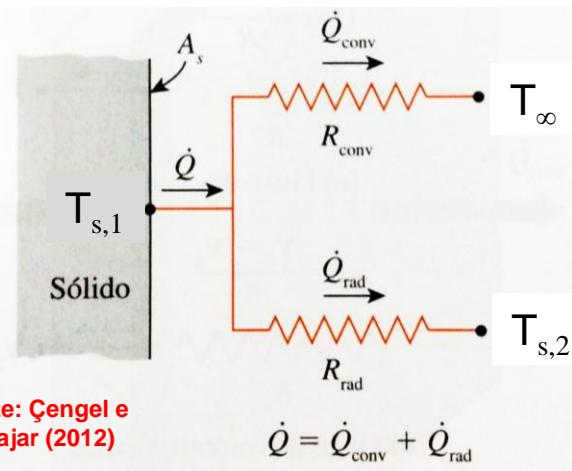
**OBS.:** A = área da seção transversal

**OBS.:** Uma resistência térmica pode também ser associada à transferência de calor por convecção em uma superfície. A partir da Lei de resfriamento de Newton, tem-se:

$$Q = hA(T_s - T_\infty) \rightarrow R_{term,conv} = \frac{1}{hA}$$

**OBS.:** A = área superficial

**OBS.:** Quando a parede é cercada por gás e a convecção for natural, os efeitos da radiação podem se tornar, também, importantes. Considere, além da convecção para o ar, a radiação térmica entre duas superfícies ( $s_1$  e  $s_2$ , sendo  $s_1$  totalmente envolta por  $s_2$ ), como na figura a seguir



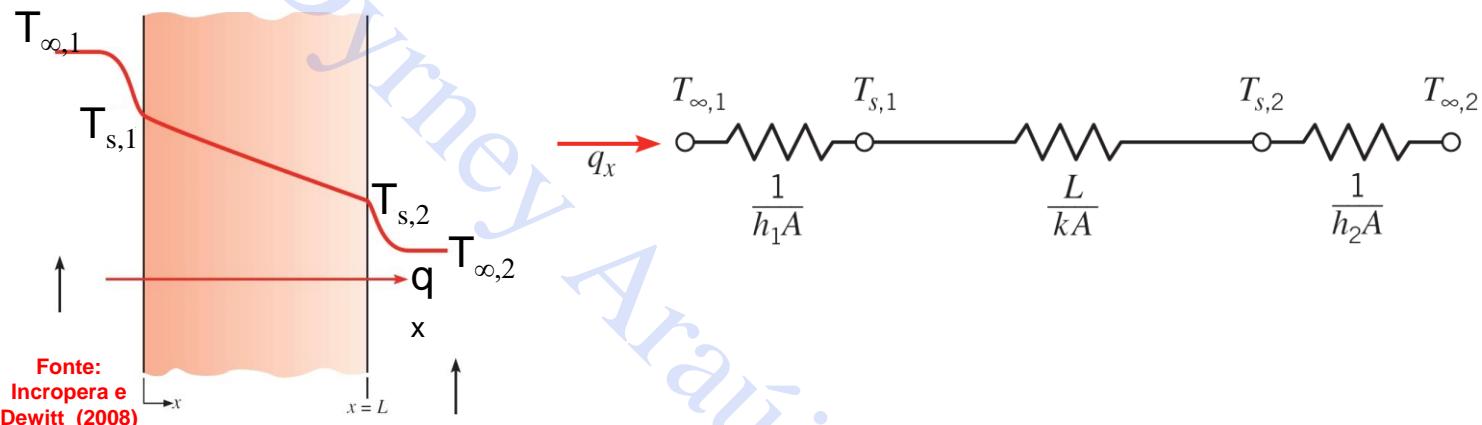
**OBS.:** Em função das complicações de se tratar a resistência à radiação separadamente da resistência à convecção, visto que estão em paralelo, bastaria substituir  $h$  da resistência convectiva por  $h_{comb}$ , como visto anteriormente neste curso, ou seja:

$$h_{comb} = h + \varepsilon\sigma(T_{s_1} + T_{s_2})(T_{s_1}^2 + T_{s_2}^2)$$

### 3 . Condução Unidimensional sem Geração

3.1 Parede plana, sem geração interna de energia térmica, estado estacionário e unidimensional

Círculo térmico equivalente para a parede plana com condução e convecção nas superfícies



A taxa de transferência de calor pode ser determinada pela consideração em separado de cada elemento da rede (em série). Uma vez que  $Q_x$  é constante ao longo da rede, tem-se que

$$Q_x = \frac{T_{\infty,1} - T_{s,1}}{\frac{1}{h_1 A}} = \frac{T_{s,1} - T_{s,2}}{\frac{L}{k A}} = \frac{T_{s,2} - T_{\infty,2}}{\frac{1}{h_2 A}}$$

Em termos da diferença de temperatura global,  $T_{\infty,1} - T_{\infty,2}$ , a taxa de transferência de calor pode ser expressa, de uma forma global, como

$$Q_x = \frac{T_{\infty,1} - T_{\infty,2}}{\frac{1}{h_1 A} + \frac{L}{k A} + \frac{1}{h_2 A}}$$

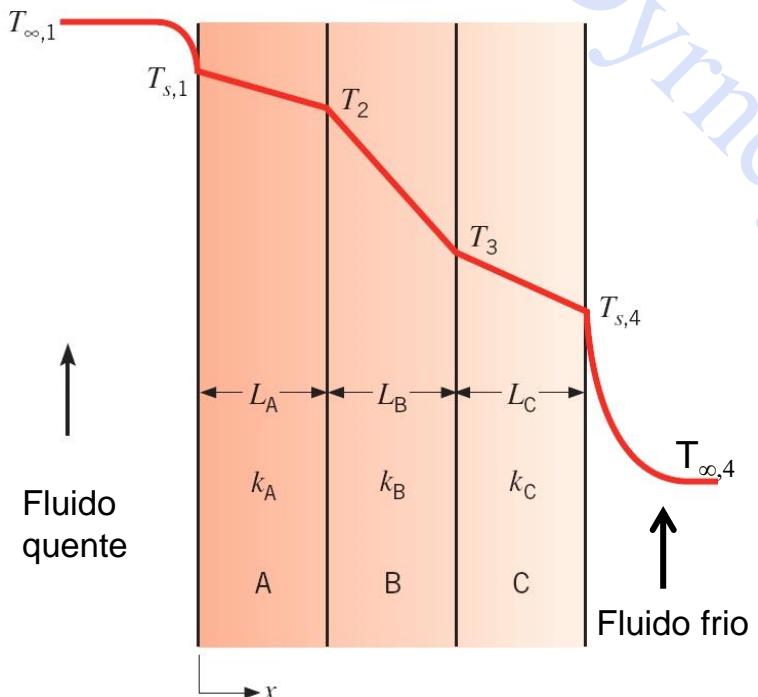
ou

$$Q_x = \frac{T_{\infty,1} - T_{\infty,2}}{R_{total}}$$

# 3 . Condução Unidimensional sem Geração

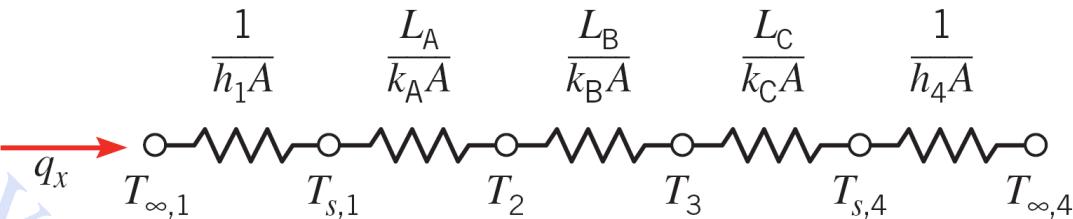
## 3.2 Parede Plana Composta

### (a) Paredes em série:



Fonte: Incropera e Dewitt (2008)

### Círcuito térmico



Neste caso, tem-se:

$$Q_x = \frac{T_{\infty,1} - T_{s,1}}{(1/h_1 A)} = \frac{T_{s,1} - T_{s,2}}{(L_A/k_A A)} = \frac{T_2 - T_3}{(L_B/k_B A)} = \\ = \frac{T_3 - T_{s,4}}{(L_C/k_C A)} = \frac{T_{s,4} - T_{\infty,4}}{(1/h_4 A)}$$

ou, em termos globais, tem-se

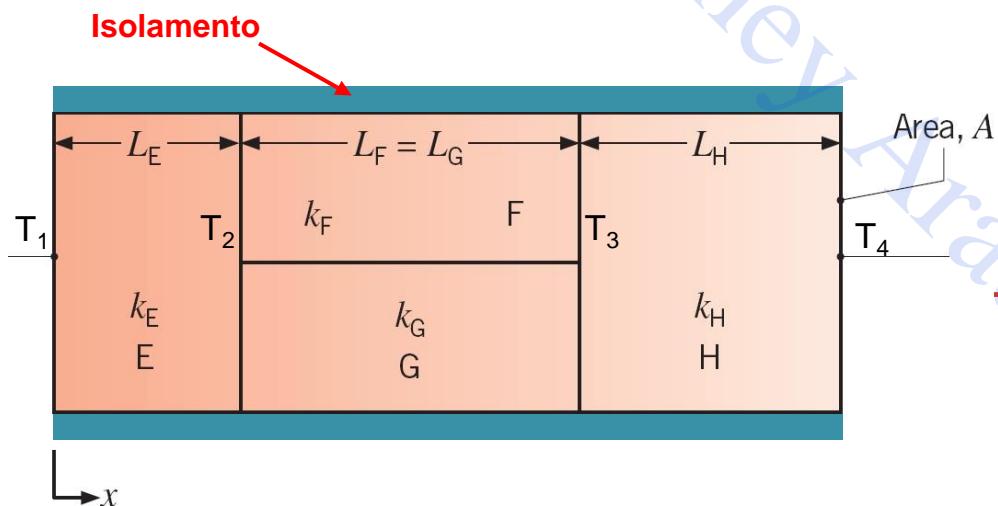
$$Q_x = \frac{T_{\infty,1} - T_{\infty,4}}{\left[ (1/h_1 A) + (L_A/k_A A) + (L_B/k_B A) + (L_C/k_C A) + (1/h_4 A) \right]}$$

# 3 . Condução Unidimensional sem Geração

## 3.2 Parede Plana Composta

### (b) Paredes em paralelo:

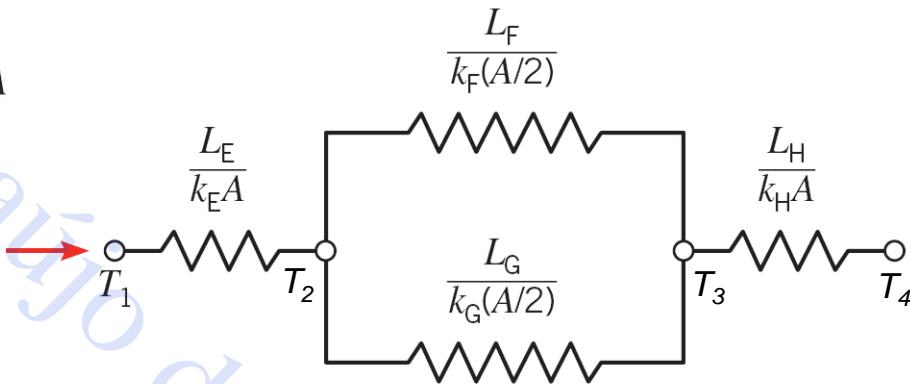
Apesar de se tratar de um problema multidimensional, pode-se aproximá-lo como unidimensional por meio das seguintes hipóteses: qualquer parede plana normal ao eixo **x** é isotérmica; e qualquer plano paralelo ao eixo **x** é adiabático



Fonte: modificado de Incropera e Dewitt (2008)

Neste caso, tem-se:

$$Q_x = \frac{T_1 - T_2}{\frac{L_E}{k_E A}} = \frac{T_2 - T_3}{\frac{L_F (A/2)}{k_F (A/2)} + \frac{L_G (A/2)}{k_G (A/2)}} = \frac{T_3 - T_4}{\frac{L_H}{k_H A}}$$



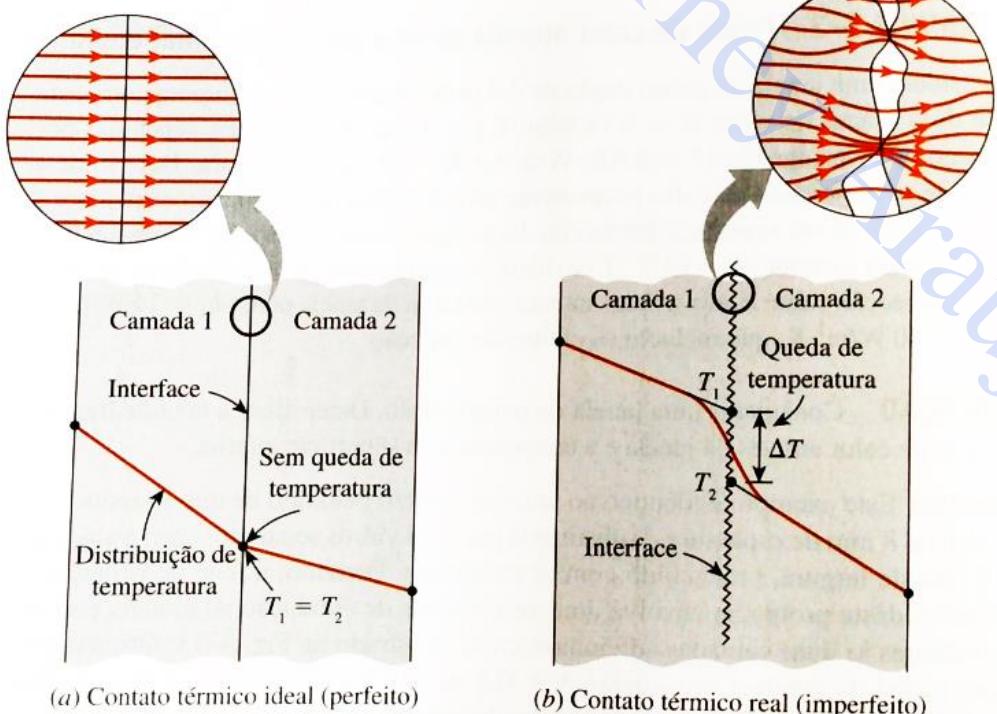
ou, em termos globais, tem-se

$$Q_x = \frac{T_1 - T_4}{\frac{L_E}{k_E A} + \frac{1}{\frac{L_F (A/2)}{k_F (A/2)} + \frac{L_G (A/2)}{k_G (A/2)}} + \frac{L_H}{k_H A}}$$

# 3 . Condução Unidimensional sem Geração

## 3.2 Parede Plana Composta

**OBS.:** Na análise de condução de calor através de multicamadas de sólido, adotamos “contato perfeito” na interface de duas camadas. Seria este o caso quando as superfícies estão perfeitamente lisas, porém, na realidade, mesmo superfícies que parecem lisas aos olhos, revelam-se bastante rugosas



Fonte: Çengel e Ghajar (2012)

Como resultado, a interface contém inúmeras lacunas de ar que funcionam como isolamento em virtude da baixa condutividade térmica do ar, causando uma queda de temperatura. Logo, uma resistência adicional deve ser levada em consideração quando a mesma for significativa, a qual é chamada de **resistência térmica de contato** ( $R_c$ ), sendo esta tabelada para diferentes materiais, rugosidades superficiais e fluidos de contato.

**OBS.:** A resistência térmica de contato pode ser minimizada, principalmente, de duas formas:

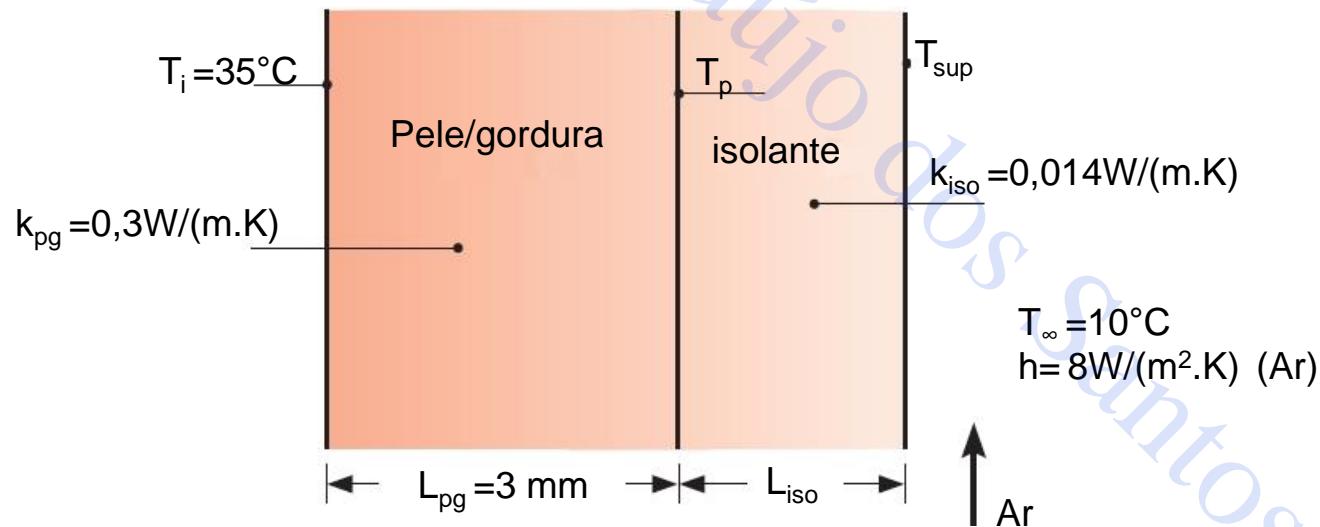
**1)** aplicação de um líquido termicamente condutor, chamado **pasta térmica**, sobre as superfícies antes que sejam pressionadas uma contra a outra;

**2)** Inserir uma folha metálica macia, como estanho, prata, cobre, níquel ou alumínio, entre as duas superfícies.

### 3 . Condução Unidimensional sem Geração

**Exercício Proposto 5:** Com a perspectiva de calcular a transferência de calor entre um corpo humano e sua vizinhança ( $T_{viz} = 10^\circ\text{C}$ ), focamos em uma camada de pele e gordura, com sua superfície externa exposta ao ambiente e sua superfície interna um pouco abaixo da temperatura corporal,  $T_i = 35^\circ\text{C}$ . Considere a camada de pele/gordura com espessura de 3 mm e com condutividade térmica  $k_{pg}=0,3\text{W}/(\text{m.K})$ . Para reduzir a taxa de perda de calor, a pessoa veste roupas especiais esportivas (condutividade térmica igual a  $0,014\text{W}/(\text{m.K})$ ). (a) Qual a espessura do isolante necessária para reduzir a taxa da perda de calor para 100W? (b) Qual a temperatura resultante da pele ( $T_p$ )?

Considere a área da seção transversal igual a  $1,8 \text{ m}^2$

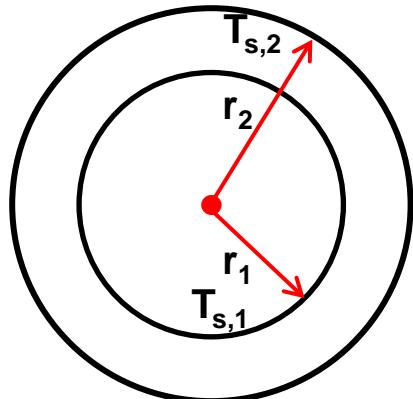


### 3 . Condução Unidimensional sem Geração

**Exercício Proposto 6:** O vidro traseiro de um automóvel é desembaçado pela fixação de um aquecedor em película, fino e transparente, sobre a sua superfície interna. Aquecendo eletricamente este elemento, um fluxo térmico uniforme pode ser estabelecido na superfície interna. Para um vidro com 4 mm de espessura, determine a potência elétrica, por unidade de área do vidro, necessária para manter uma temperatura na superfície interna de 15°C, quando a temperatura do ar no interior do carro e o coeficiente convectivo são  $T_{\infty,i} = 25^\circ\text{C}$  e  $h_i = 10 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$ , enquanto a temperatura e o coeficiente convectivo no ar exterior (ambiente) são  $T_{\infty,e} = -10^\circ\text{C}$  e  $h_e = 65 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$ . Considere a condutividade térmica do vidro igual a  $k = 1,4 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$ .

### 3 . Condução Unidimensional sem Geração

#### 3.3 Cilindro “infinito”, sem geração de calor e em estado estacionário



Analisando a **Equação da Difusão Térmica** em coordenadas cilíndricas

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( kr \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( k \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial T}{\partial z} \right) \pm \dot{Q}$$

regime estacionário

Condição de simetria

Cilindro infinito

sem geração de energia

Após as devidas simplificações, tem-se:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( kr \frac{dT}{dr} \right) = 0 \longrightarrow \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rq_r) = 0 \longrightarrow rq_r = cte_1$$

**OBS.:** multiplicando ambos os lados por  $2\pi L$ , sendo  $L$  o comprimento, e considerando a área superficial do tubo  $A=2\pi Lr$ , tem-se:

$$(2\pi L)rq_r = cte_1(2\pi L) \longrightarrow Q_r = cte_2 \longrightarrow \boxed{\text{Taxa térmica constante na direção “r”}}$$

### 3 . Condução Unidimensional sem Geração

#### 3.3 Cilindro “infinito”, sem geração de calor e em estado estacionário

Considerando **k = cte** e integrando uma vez, tem-se:

$$\int \frac{d}{dr} \left( r \frac{dT}{dr} \right) dr = \int 0 dr \quad \longrightarrow \quad r \frac{dT}{dr} = C_1 \quad \text{ou} \quad \frac{dT}{dr} = \frac{C_1}{r}$$

Integrando-a novamente:

$$\int \frac{dT}{dr} dr = \int \frac{C_1}{r} dr \quad \longrightarrow \quad T = C_1 \ln(r) + C_2$$

sujeito às seguintes condições de contorno:  $\begin{cases} T(r=r_1) = T_{s,1} \\ T(r=r_2) = T_{s,2} \end{cases}$

Substituindo as condições de contorno, tem-se o seguinte **sistema de equações**:

$$\begin{cases} T_{s,1} = C_1 \ln(r_1) + C_2 \\ T_{s,2} = C_1 \ln(r_2) + C_2 \end{cases}$$

### 3 . Condução Unidimensional sem Geração

#### 3.3 Cilindro “infinito”, sem geração de calor e em estado estacionário

Resolvendo-as para as constantes  $C_1$  e  $C_2$ :

$$C_1 = \frac{T_{s,2} - T_{s,1}}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} \quad \text{e} \quad C_2 = T_{s,1} - \frac{(T_{s,2} - T_{s,1})}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} \ln(r_1)$$

Substituindo as constantes na solução geral, a distribuição de temperaturas é então:

$$T = T_{s,1} + \frac{(T_{s,2} - T_{s,1})}{\ln(r_2 / r_1)} \ln\left(\frac{r}{r_1}\right)$$

**OBS.: A temperatura varia **logaritmicamente** com a posição radial em geometrias cilíndricas**

### 3 . Condução Unidimensional sem Geração

#### 3.3 Cilindro “infinito”, sem geração de calor e em estado estacionário

Agora que se tem a distribuição de temperaturas, pode-se utilizar a **Lei de Fourier** para a determinação da taxa de transferência de calor por condução.

$$Q_r = -k(2\pi r L) \frac{dT}{dr} \rightarrow Q_r = -k(2\pi r L) \left[ 0 + \frac{(T_{s,2} - T_{s,1})}{\ln(r_2 / r_1)} \frac{1}{r} \right]$$

Rearranjando, tem-se:

$$Q_r = \frac{(T_{s,1} - T_{s,2})}{\ln(r_2 / r_1) / 2\pi L k}$$

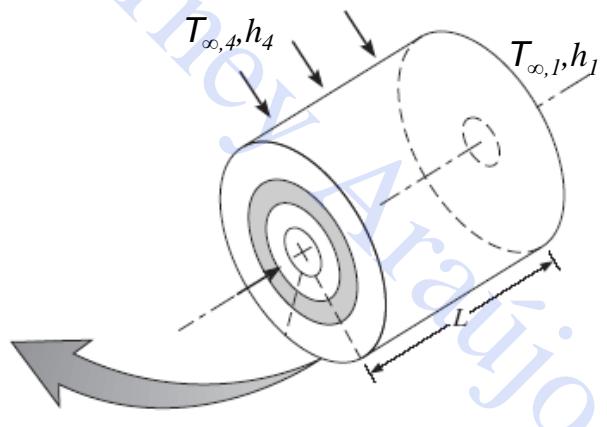
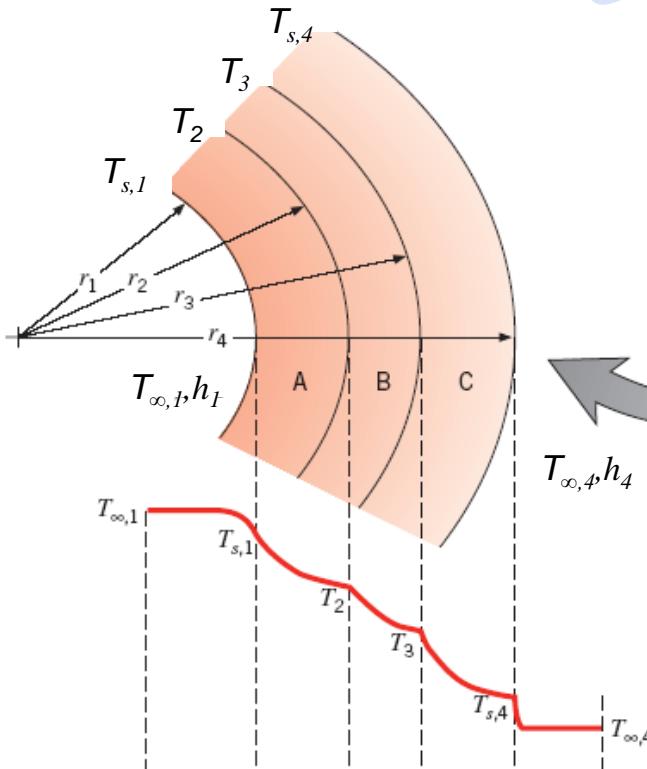
**OBS.:** Por analogia ao transporte de cargas elétricas (**Lei de Ohm**), tem-se a resistência condutiva em coordenadas cilíndricas

$$R_{term,cond} = \frac{\ln(r_2 / r_1)}{2\pi L k}$$

# 3 . Condução Unidimensional sem Geração

## 3.4 Cilindros Compostos

Considere o sistema de cilindros compostos ou concêntricos mostrado abaixo:



**Taxa de transferência de calor:**

$$Q_r = \frac{T_{\infty,1} - T_{s,1}}{\frac{1}{2\pi r_1 L h_1}} = \frac{T_{s,1} - T_2}{\frac{\ln(r_2 / r_1)}{2\pi k_A L}} = \frac{T_2 - T_3}{\frac{\ln(r_3 / r_2)}{2\pi k_B L}} =$$

$$= \frac{T_3 - T_{s,4}}{\frac{\ln(r_4 / r_3)}{2\pi k_C L}} = \frac{T_{s,4} - T_{\infty,4}}{\frac{1}{2\pi r_4 L h_4}}$$

**Taxa de transferência de calor global:**

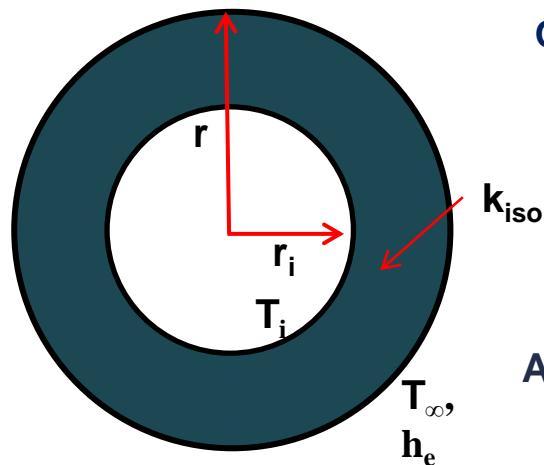
$$Q_r = \frac{T_{\infty,1} - T_{\infty,4}}{\frac{1}{2\pi r_1 L h_1} + \frac{\ln(r_2 / r_1)}{2\pi k_A L} + \frac{\ln(r_3 / r_2)}{2\pi k_B L} + \frac{\ln(r_4 / r_3)}{2\pi k_C L} + \frac{1}{2\pi r_4 L h_4}}$$

Fonte: Incropera e Dewitt (2008)

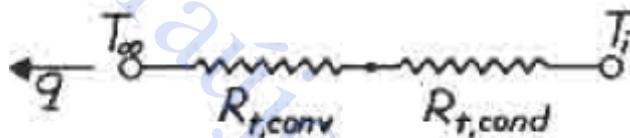
# 3 . Condução Unidimensional sem Geração

## 3.5 Conceito do Raio Crítico de Isolamento para Cilindros

Considerações: o sistema abaixo é composto por um cilindro cuja espessura foi desprezada frente à espessura de um material isolante de condutividade “ $k_{iso}$ ”. A parede interna, em “ $r_i$ ”, é mantida a uma temperatura constante “ $T_i$ ”. Tem-se que “ $r$ ” é variável, ou seja, pode ser aumentado ou diminuído para se analisar o efeito da espessura do isolante sobre taxa de calor perdida pelo tubo. O tubo, juntamente com o isolante, é exposto em um ambiente a uma temperatura constante “ $T_\infty$ ” e com um coeficiente de película externo “ $h_e$ ”.



O diagrama térmico é representado por



A taxa de calor através do circuito é: 
$$Q_r = \frac{(T_i - T_\infty)}{R_{tot}}$$

Sendo que a resistência total é composta por uma **resistência condutiva** e por uma **resistência convectiva**, respectivamente, dada por:

$$R_{term,cond} = \frac{\ln(r/r_i)}{2\pi k L} \quad \text{e} \quad R_{term,conv} = \frac{1}{hA_s} = \frac{1}{2\pi r L h} \quad \text{Logo,} \quad R_{tot} = \frac{\ln(r/r_i)}{2\pi k L} + \frac{1}{2\pi r L h}$$

### 3 . Condução Unidimensional sem Geração

#### 3.5 Conceito do Raio Crítico de Isolamento para Cilindros

**Otimização do processo de isolamento:** Para se determinar o valor de “ $r$ ” que minimiza “ $Q_r$ ” ou máxima “ $R_{tot}$ ”, deve-se fazer:

$$\frac{dR_{tot}}{dr} = 0$$

Logo,

$$\frac{d}{dr} \left[ \frac{\ln(r/r_i)}{2\pi kL} + \frac{1}{2\pi r L h} \right] = 0 \longrightarrow \left[ \frac{1}{2\pi k L r} - \frac{1}{2\pi h L r^2} \right] = 0, \text{ isolando } "r", \text{ tem-se: } r = \frac{k}{h}$$

**OBS.:** o “ $r$ ” encontrado é aquele correspondente ao ponto crítico (local que minimiza ou máxima  $R_{tot}$ )

**OBS.:** Para determinar se o resultado anterior maximiza ou minimiza a resistência total, a segunda derivada deve ser avaliada

$$\frac{d}{dr} \left[ \frac{dR_{tot}}{dr} \right] = -\frac{1}{2\pi k L r^2} + \frac{1}{\pi r^3 h L} \quad \text{avaliando em } r = k/h, \text{ tem-se: } \frac{d}{dr} \left[ \frac{dR_{tot}}{dr} \right] = \frac{1}{\pi L (k/h)^2} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{2k} \right)$$

# 3 . Condução Unidimensional sem Geração

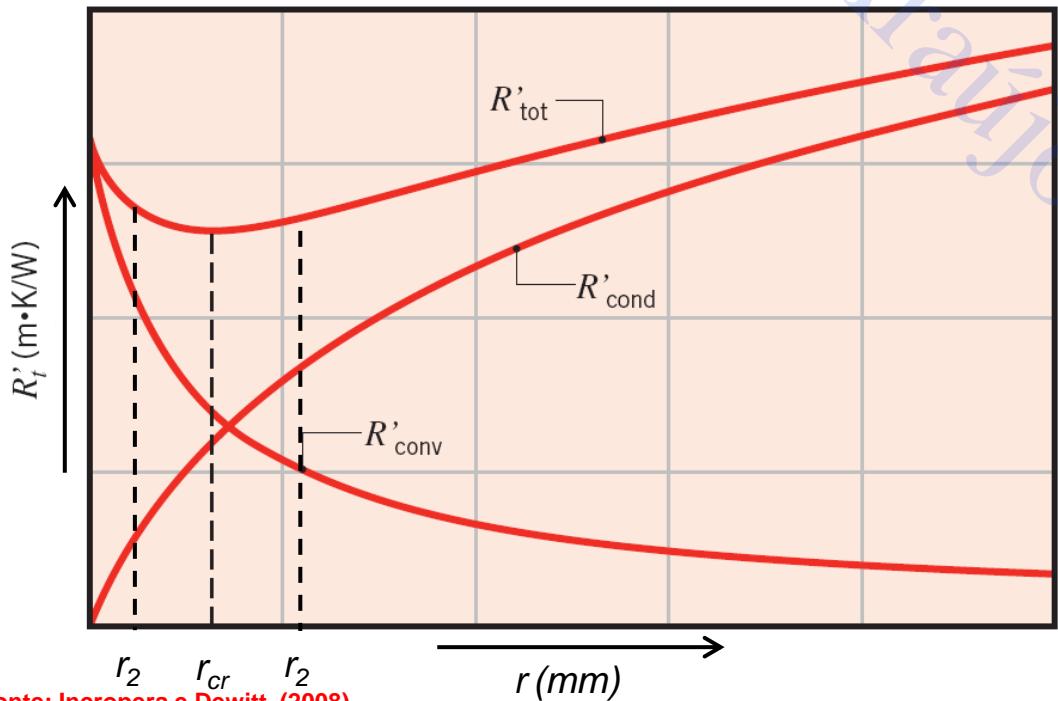
## 3.5 Conceito do Raio Crítico de Isolamento para Cilindros

Logo, tem-se

$$\frac{d}{dr} \left[ \frac{dR_{tot}}{dr} \right] = \frac{1}{2\pi L k^3 / h^2} \rightarrow \frac{d^2 R_{tot}}{dr^2} > 0$$

Neste caso,  $r=k/h$  é o raio do isolante para o qual a resistência total é um mínimo e não um máximo; “r” é conhecido como raio crítico de isolamento e representado por “ $r_{cr}$ ”

### Análise Gráfica do raio crítico ( $r_{cr}$ )



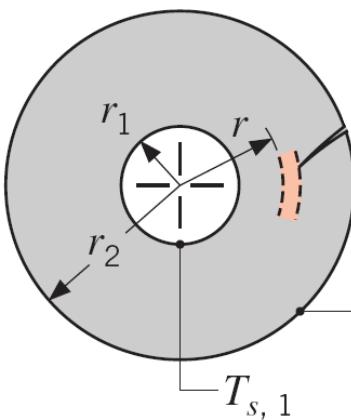
- **Caso 1:** Se  $r_2 < r_{cr}$ , a resistência térmica total decresce e, portanto, a taxa de transferência de calor aumenta com a adição do isolante. Isto acontece até que o raio externo do isolante atinja o valor do raio crítico.

- **Caso 2:** Se  $r_2 > r_{cr}$ , qualquer adição de isolamento aumenta a resistência térmica total e, portanto, diminui a perda de calor.

**OBS.:** Em uma parede plana (área normal à transferência de calor é constante), a resistência total sempre aumenta com o aumento da espessura do isolante.

### 3 . Condução Unidimensional sem Geração

#### 3.6 Casca Esférica sem geração de calor e em estado estacionário



Analisando a **Equação da Difusão Térmica** em coordenadas esféricas

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( k r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( k \frac{\partial T}{\partial \phi} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( k \sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \dot{Q}$$

regime estacionário

Condição de simetria

sem geração de energia

Após as devidas simplificações, tem-se:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( k r^2 \frac{dT}{dr} \right) = 0 \longrightarrow \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 q_r \right) = 0 \longrightarrow r^2 q_r = cte_1$$

**OBS.:** Multiplicando ambos os lados por  $4\pi$ , e considerando a área superficial da esfera  $A=4\pi r^2$ , tem-se:

$$(4\pi) r^2 q_r = cte_1 (4\pi) \longrightarrow Q_r = cte_2 \longrightarrow \boxed{\text{Taxa térmica constante na direção "r"}}$$

### 3 . Condução Unidimensional sem Geração

#### 3.6 Casca Esférica sem geração de calor e em estado estacionário

Considerando  $k = \text{cte}$  e integrando uma vez, tem-se:

$$\int \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dT}{dr} \right) dr = \int 0 dr \longrightarrow r^2 \frac{dT}{dr} = C_1 \text{ ou } \frac{dT}{dr} = \frac{C_1}{r^2}$$

Integrando-a novamente:

$$\int \frac{dT}{dr} dr = \int \frac{C_1}{r^2} dr \longrightarrow T = -\frac{C_1}{r} + C_2$$

sujeito às seguintes condições de contorno:  $\begin{cases} T(r = r_1) = T_{s,1} \\ T(r = r_2) = T_{s,2} \end{cases}$

Substituindo as condições de contorno, tem-se o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} T_{s,1} = -\frac{C_1}{r_1} + C_2 \\ T_{s,2} = -\frac{C_1}{r_2} + C_2 \end{cases}$$

### 3 . Condução Unidimensional sem Geração

#### 3.6 Casca Esférica sem geração de calor e em estado estacionário

Resolvendo-as para as constantes:

$$C_1 = \frac{T_{s,1} - T_{s,2}}{\left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)} \quad \text{e} \quad C_2 = T_{s,1} + \frac{1}{r_1} \frac{T_{s,1} - T_{s,2}}{\left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)}$$

Substituindo as constantes na solução geral, a distribuição de temperaturas é então:

$$T = T_{s,1} - \frac{T_{s,1} - T_{s,2}}{\left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r} \right)$$

**OBS.: Temperatura varia hiperbolicamente com a posição radial em geometrias esféricas**

### 3 . Condução Unidimensional sem Geração

#### 3.6 Casca Esférica sem geração de calor e em estado estacionário

Finalmente, utilizando a **Lei de Fourier** para a determinação da taxa de calor por condução, tem-se

$$Q_r = -k(4\pi r^2) \frac{dT}{dr} \xrightarrow{\text{Lei de Fourier}} Q_r = -k(4\pi r^2) \left[ 0 - \frac{T_{s,1} - T_{s,2}}{\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)} \left(-\frac{1}{r^2}\right) \right]$$

Rearranjando, tem-se:

$$Q_r = \frac{(T_{s,1} - T_{s,2})}{\frac{1}{4k\pi} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)}$$

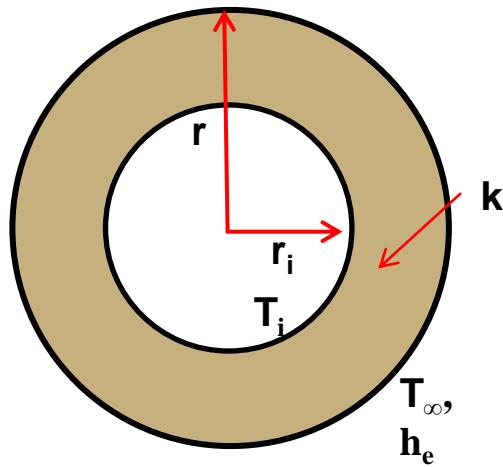
**OBS.:** Por analogia ao transporte de cargas elétricas (**Lei de Ohm**), tem-se a resistência condutiva em coordenadas esféricas

$$R_{term,cond} = \frac{1}{4\pi k} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

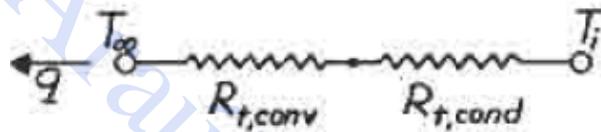
### 3 . Condução Unidimensional sem Geração

#### 3.7 Conceito do Raio Crítico de Isolamento para Casca Esférica

**Considerações:** No tópico anterior foi deduzida uma expressão para o raio crítico de isolante em um tubo cilíndrico isolado. Considerando as mesmas condições anteriores, porém agora para uma casca esférica, tem-se:



De forma similar, o **diagrama térmico** é representado por



A taxa de calor através do circuito é:  $Q_r = \frac{(T_i - T_\infty)}{R_{tot}}$

Novamente, a resistência total pode ser expressa como sendo a soma das resistências condutivas e convectivas, como mostrado abaixo:

$$R_{term,cond} = \frac{1}{4\pi k} \left[ \frac{1}{r_i} - \frac{1}{r} \right] \quad \text{e} \quad R_{term,conv} = \frac{1}{hA_s} = \frac{1}{4\pi hr^2} \quad \text{Logo,} \quad R_{tot} = \frac{1}{4\pi hr^2} + \frac{1}{4\pi k} \left[ \frac{1}{r_i} - \frac{1}{r} \right]$$

### 3 . Condução Unidimensional sem Geração

#### 3.7 Conceito do Raio Crítico de Isolamento para Casca Esférica

Novamente, para se determinar o valor de “ $r$ ” que minimiza “ $Q_r$ ” ou máxima “ $R_{tot}$ ”, deve-se fazer:

$$\frac{dR_{tot}}{dr} = 0 \quad \text{Logo,} \quad \frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{4\pi hr^2} + \frac{1}{4\pi k} \left( \frac{1}{r_i} - \frac{1}{r} \right) \right] = 0 \quad \longrightarrow \quad \left[ \frac{1}{4\pi k} \frac{1}{r^2} - \frac{1}{2\pi h} \frac{1}{r^3} \right] = 0$$

Isolando “ $r$ ”, tem-se:  $r = 2 \frac{k}{h}$

Analizando a “derivada segunda” para verificar se o resultado anterior maximiza ou minimiza a resistência total, tem-se:

$$\frac{d}{dr} \left[ \frac{dR_{tot}}{dr} \right] = -\frac{1}{2\pi k} \frac{1}{r^3} + \frac{3}{2\pi h} \frac{1}{r^4} \quad \longrightarrow \quad \frac{d}{dr} \left[ \frac{dR_{tot}}{dr} \right] = \frac{1}{(2k/h)^3} \left\{ -\frac{1}{2\pi k} + \frac{3}{2\pi h} \frac{1}{2k/h} \right\}$$

Logo,

$$\frac{d}{dr} \left[ \frac{dR_{tot}}{dr} \right] = \frac{1}{(2k/h)^3} \frac{1}{2\pi k} \left\{ -1 + \frac{3}{2} \right\} > 0$$

**OBS.:** Neste caso,  $r_{cr}=2k/h$  é o raio crítico de isolante para casca esférica para o qual a resistência total é um mínimo. Toda a análise realizada para o cilindro se aplica para a casca esférica

### 3 . Condução Unidimensional sem Geração

#### Exercício Proposto 7:

##### Determinação experimental da condutividade térmica de um material isolante

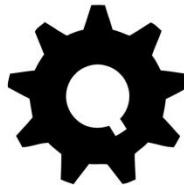
Uma esfera oca de alumínio, com um aquecedor elétrico no centro, é usada em testes para determinar a condutividade térmica de materiais isolantes. Os raios interno e externo da esfera são **0,15** e **0,18 m**, respectivamente, e os testes são realizados em condições de regime estacionário com a superfície interna do alumínio mantida a **250°C**. Em um teste específico, uma casca esférica de isolante é moldada sobre a superfície externa da esfera até uma espessura de **0,12 m**. O sistema encontra-se em uma sala na qual a temperatura do ar é de **20°C** e o coeficiente de transferência de calor por convecção na superfície externa do isolante é de **30 W/(m<sup>2</sup>.K)**. Se **80 W** são dissipados pelo aquecedor em condições de regime estacionário, qual é a condutividade térmica do isolante? Considere a condutividade térmica do alumínio igual a **230W/(m.k)**.

# Bibliografia

**INCROPERA, F.P. e DEWITT, D.P.** *Fundamentos de transferência de calor e massa*, 6<sup>a</sup> ed., LTC, 2008.

**ÇENGEL, Y.A e GHAJAR, A.J.**; *Transferência de calor e massa*, McGraw Hill, 4<sup>a</sup> edição, 2012.

**WELTY, J. R.; RORRER, G. L.; FOSTER, D.G.** *Fundamentos de Transferência de Momento, de Calor e de Massa*; tradução e revisão técnica Verônica Calado, 6. ed., Rio de Janeiro: LTC, 2017.



# Condução Unidimensional - Regime Estacionário e com Geração de Energia

## Placas e Sistemas Radiais

Professor Dyrney Araújo dos Santos  
**Universidade Federal de Goiás**  
**Curso: Graduação em Engenharia Química**  
**Disciplina: Fenômenos de Transporte 2**  
site: [www.dyrney.com](http://www.dyrney.com)

# 4 . Condução Unidimensional com Geração

## 4.1 Fontes de Geração de Energia Térmica

A energia térmica pode ser gerada no interior de um sólido através de diferentes formas

I – aquecimento ôhmico ou resistivo em que a energia elétrica é transformada em calor;

$$\dot{Q} \equiv \frac{I^2 R_e}{V}$$

Efeito Joule:

$R_e$  = resistência elétrica  
 $i$  = corrente elétrica  
 $V$  = volume do sistema

II – desaceleração e absorção de nêutrons numa reação nuclear;

III – reação química exotérmica no interior do sistema;

IV – radiação visível absorvida por estrutura semitransparente (automóvel exposto ao sol).

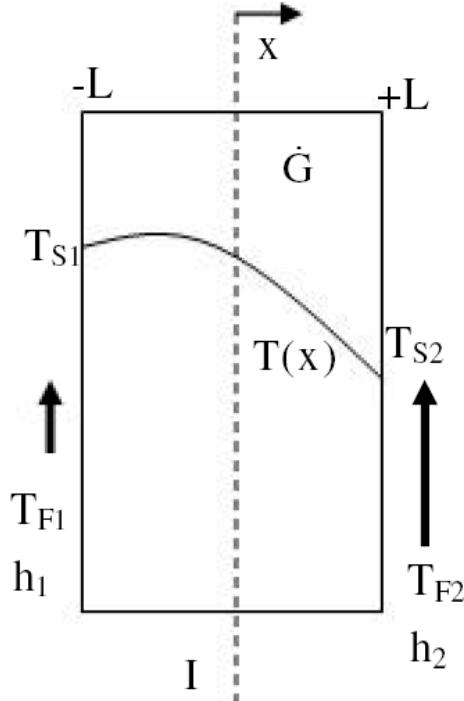
# 4 . Condução Unidimensional com Geração

## 4.2 Geração em Paredes Planas

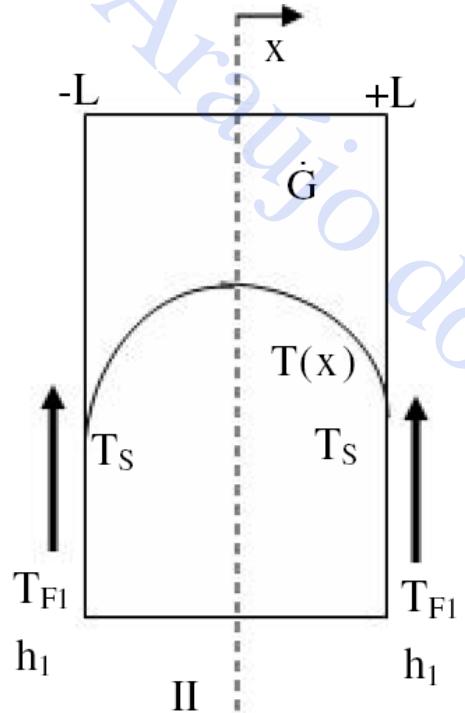
### a) Paredes Planas

Conjuntamente com a geração de energia por unidade de volume do sistema ( $\dot{Q}$ ), as paredes planas podem ser dispostas sob três diferentes arranjos

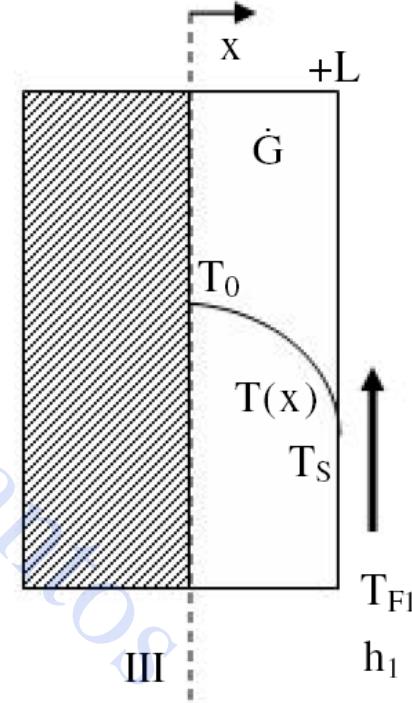
**I - Condições de contorno assimétrica**



**II - Condições de contorno simétrica**



**III – Superfícies adiabáticas**



# 4 . Condução Unidimensional com Geração

## 4.2 Geração em Paredes Planas

### a) Paredes Planas

Partindo-se da **Equação da Difusão de Calor** (em coordenadas cartesianas) e das seguintes hipóteses:

- i) estado estacionário;
- ii) geração de energia uniforme em todo o volume material;
- iii) transporte unidimensional (direção “x”);
- iv) condutividade térmica constante.

A forma apropriada da equação do calor, juntamente com as condições de contorno para as diferentes situações (**I-condição assimétrica**; **II-condição simétrica**; **III-condição adiabática**) é dada por:

$$\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{\dot{Q}}{k} = 0$$

Situação I:  $T(x = -L) = T_{s1}$  e  $T(x = +L) = T_{s2}$   
 Situação II:  $T(x = -L) = T_s$  e  $T(x = +L) = T_s$   
 Situação III:  $\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = 0$  ( $T_{máximo} = T_0$ ) e  $T(x = +L) = T_s$

# 4 . Condução Unidimensional com Geração

## 4.2 Geração em Paredes Planas

### a) Paredes Planas

Integrando a equação anterior uma vez, obtém-se a constante  $C_1$ :

$$\int \frac{d}{dx} \left( \frac{dT}{dx} \right) dx = \int -\frac{\dot{Q}}{k} dx$$

$$\frac{dT}{dx} = -\frac{\dot{Q}}{k} x + C_1$$

Integrando-a novamente, tem-se a equação na forma geral com as constantes  $C_1$  e  $C_2$ :

$$\int \frac{dT}{dx} dx = \int \left( -\frac{\dot{Q}}{k} x + C_1 \right) dx$$

$$T = -\frac{\dot{Q}}{2k} x^2 + C_1 x + C_2$$

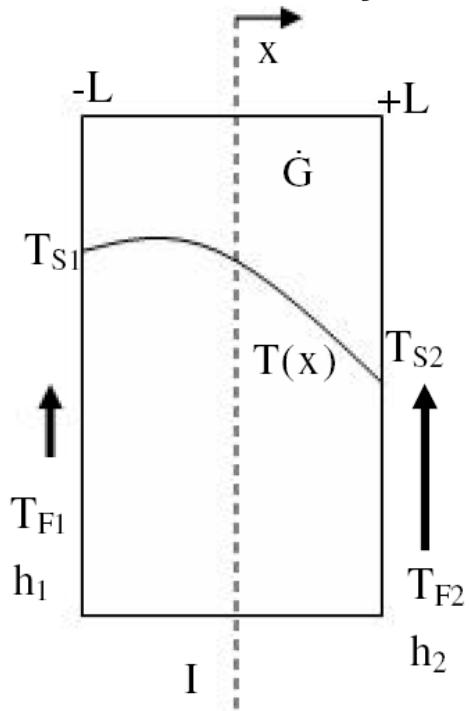
**OBS.:** Para “adaptar” a equação geral a cada uma das situações, é necessário o uso das condições de contorno.

# 4 . Condução Unidimensional com Geração

## 4.2 Geração em Paredes Planas

### a) Paredes Planas

- Para a Situação I: condição de contorno assimétrica



**Equação geral:**  $T = -\frac{\dot{Q}}{2k}x^2 + C_1x + C_2$

**Condição de Contorno:**  $T = \begin{cases} T_{s1} & \text{para } x = -L \\ T_{s2} & \text{para } x = +L \end{cases}$

Resolvendo a equação geral (anterior) para as constantes de integração, tem-se:

$$C_1 = \frac{T_{s2} - T_{s1}}{2L} \quad \text{e} \quad C_2 = \frac{\dot{Q}}{2k}L^2 + \frac{T_{s1} + T_{s2}}{2}$$

A distribuição de temperaturas é então:

$$T = \frac{\dot{Q}L^2}{2k} \left( 1 - \frac{x^2}{L^2} \right) + \frac{(T_{s2} - T_{s1})}{2} \frac{x}{L} + \frac{(T_{s1} + T_{s2})}{2}$$

Aplicando a **Lei de Fourier**, tem-se a taxa de transferência de calor por condução:

$$Q_x = \left[ \dot{Q}x - \frac{k}{2L}(T_{s2} - T_{s1}) \right] A$$

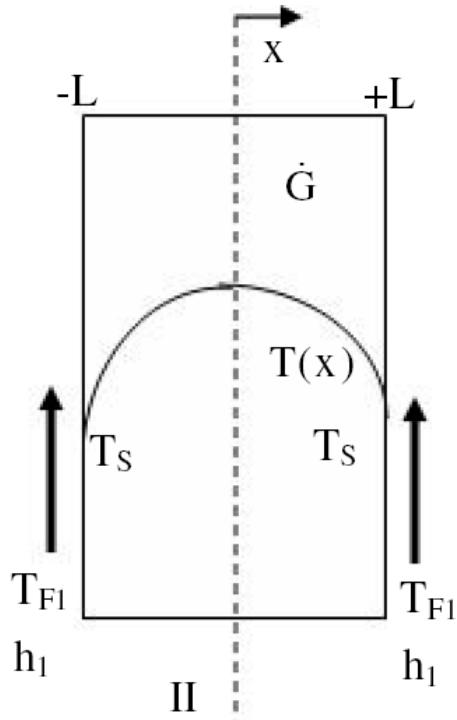
Sendo A a área da seção transversal à transferência de calor

# 4 . Condução Unidimensional com Geração

## 4.2 Geração em Paredes Planas

### a) Paredes Planas

- Para a Situação II: condição de contorno simétrica



$$\text{Equação geral: } T = -\frac{\dot{Q}}{2k}x^2 + C_1x + C_2$$

$$\text{Condição de Contorno: } T = \begin{cases} T_s & \text{para } x = -L \\ T_s & \text{para } x = +L \end{cases}$$

Resolvendo a equação geral para as constantes de integração, tem-se:

$$C_1 = 0 \quad \text{e} \quad C_2 = T_s + \frac{\dot{Q}}{2k}L^2$$

A distribuição de temperaturas é então:

$$T = \frac{\dot{Q}L^2}{2k} \left( 1 - \frac{x^2}{L^2} \right) + T_s$$

Aplicando a **Lei de Fourier**, tem-se a taxa de transferência de calor por condução:

$$Q_x = \dot{Q}xA$$

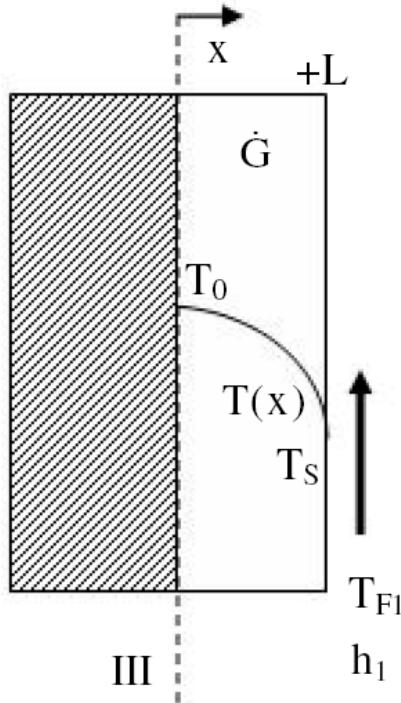
Sendo A a área da seção transversal à transferência de calor

# 4 . Condução Unidimensional com Geração

## 4.2 Geração em Paredes Planas

### a) Paredes Planas

- Para a Situação III: superfície adiabática



**Equação geral:**  $T = -\frac{\dot{Q}}{2k}x^2 + C_1x + C_2$

**Condição de Contorno:**  $T = \begin{cases} \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0 & (T_{máximo} = T_0) \\ T_s & \text{para } x = +L \end{cases}$

Resolvendo a equação geral para as constantes de integração, tem-se:

$$C_1 = 0 \quad \text{e} \quad C_2 = T_s + \frac{\dot{Q}}{2k}L^2$$

Desta forma, tem-se:

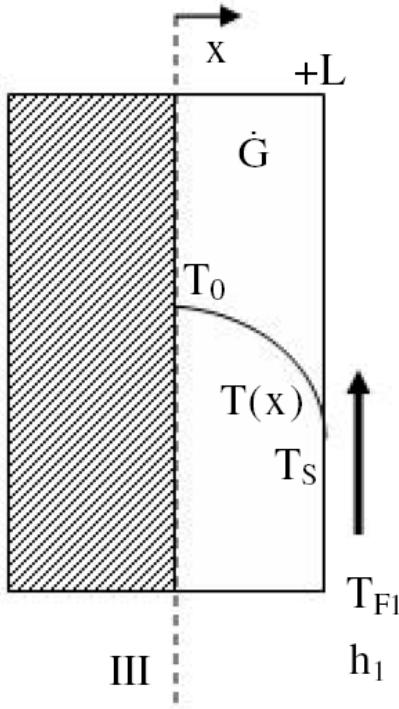
$$T = \frac{\dot{Q}L^2}{2k} \left( 1 - \frac{x^2}{L^2} \right) + T_s \quad \boxed{1}$$

# 4 . Condução Unidimensional com Geração

## 4.2 Geração em Paredes Planas

### a) Paredes Planas

- Para a Situação III: superfície adiabática



Visto que  $T = T_0$  (temperatura máxima) em  $x = 0$ , tem-se, substituindo esta condição na Eq. 1, anterior:

$$T(x=0) = T_0 = \frac{\dot{Q}L^2}{2k} + T_s \xrightarrow{\text{rearranjando}} T_0 - T_s = \frac{\dot{Q}L^2}{2k}$$

substituindo este resultado na Eq. 1, tem-se:

$$\frac{T(x) - T_0}{T_s - T_0} = \left( \frac{x}{L} \right)^2$$

Aplicando a **Lei de Fourier**, tem-se a taxa de transferência de calor por condução:

$$Q_x = \dot{Q}x A$$

Sendo **A** a área da seção transversal à transferência de calor

# 4 . Condução Unidimensional com Geração

## 4.2 Geração em Paredes Planas

### a) Paredes Planas

- OBS.:** Se no caso I, II e III as temperaturas nas extremidades das paredes não forem conhecidas, porém, as temperaturas do ambiente externo e os coeficientes de película (**h**) forem conhecidos, ao invés das condições retro-mencionadas, deveriam ser utilizadas as seguintes condições de contorno:

#### CASO I: Condição de Contorno Assimétrica

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=-L} = h_1 (T_{s1} - T_{F1}) \quad \text{e} \quad -k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=+L} = h_2 (T_{s2} - T_{F2})$$

#### CASO II: Condição de Contorno Simétrica

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=+L} = h(T_s - T_F) \quad \text{e} \quad -k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=-L} = h(T_s - T_F)$$

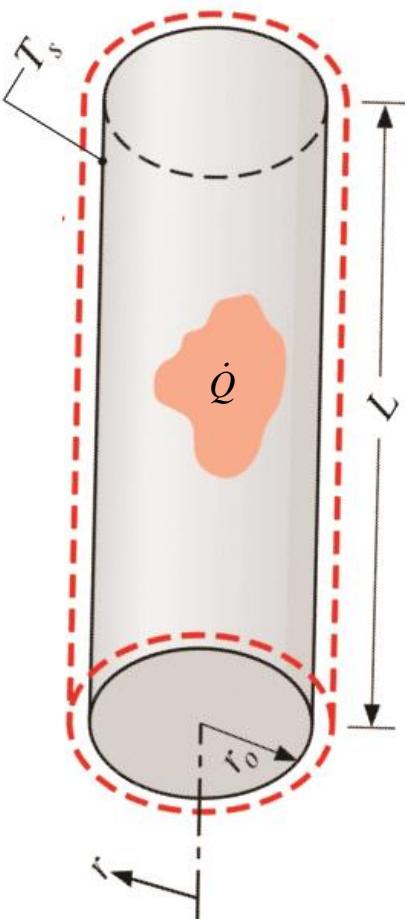
#### CASO III: Superfície Adiabática

$$\frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0 \quad \text{e} \quad -k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=+L} = h(T_s - T_F)$$

# 4 . Condução Unidimensional com Geração

## 4.3 Geração em Sistemas Radiais

### b) Cilindro



De acordo com as hipóteses adotadas anteriormente, a forma apropriada da **Equação da Difusão Térmica** em coordenadas cilíndricas será:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dT}{dr} \right) + \frac{\dot{Q}}{k} = 0$$

Separando as variáveis e integrando uma vez:

$$\int \frac{d}{dr} \left( r \frac{dT}{dr} \right) dr = \int -\frac{\dot{Q}}{k} r dr \quad \longrightarrow \quad r \frac{dT}{dr} = -\frac{\dot{Q}}{k} \frac{r^2}{2} + C_1$$

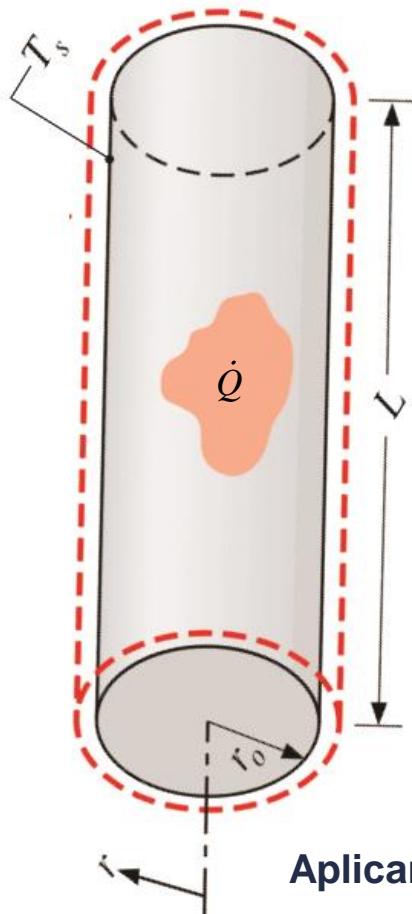
Separando as variáveis e integrando novamente:

$$\int \frac{dT}{dr} dr = \int \left( -\frac{\dot{Q}}{k} \frac{r}{2} + \frac{C_1}{r} \right) dr \quad \longrightarrow \quad T = -\frac{\dot{Q} r^2}{k 4} + C_1 \ln(r) + C_2$$

# 4 . Condução Unidimensional com Geração

## 4.3 Geração em Sistemas Radiais

### b) Cilindro



i) Cilindro Maciço: no caso de um cilindro maciço, as condições de contorno são:

$$\left. \frac{dT}{dr} \right|_{r=0} = 0 \quad (\text{condição de simetria}) \quad \text{e} \quad T(r = r_0) = T_s$$

Resolvendo a equação geral para as constantes de integração, tem-se:

$$C_1 = 0 \quad \text{e} \quad C_2 = T_s + \frac{\dot{Q}}{4k} r_0^2$$

Consequentemente, a distribuição de temperaturas é:

$$T = T_s + \frac{\dot{Q}r_0^2}{4k} \left( 1 - \frac{r^2}{r_0^2} \right)$$

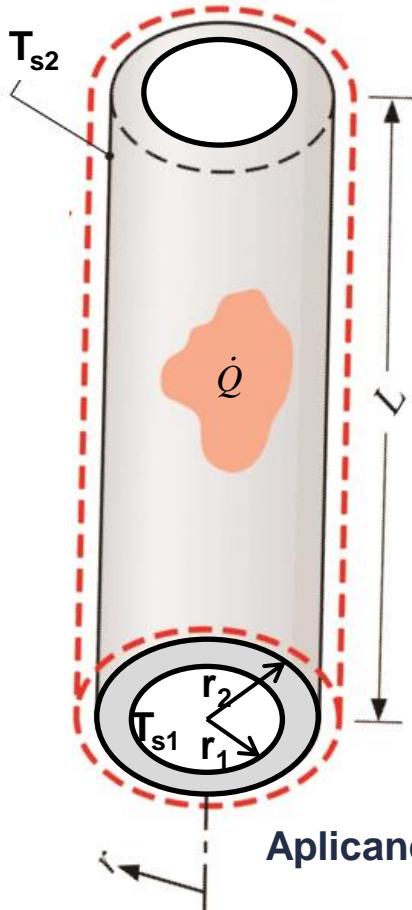
Aplicando a **Lei de Fourier**, tem-se a taxa de transferência de calor por condução:

$$Q_r = \dot{Q}\pi L r^2$$

# 4 . Condução Unidimensional com Geração

## 4.3 Geração em Sistemas Radiais

### b) Cilindro



ii) Cilindro Oco: no caso de um cilindro oco, as condições de contorno são

$$T(r = r_1) = T_{s1} \quad \text{e} \quad T(r = r_2) = T_{s2}$$

Resolvendo a equação geral para as constantes de integração, tem-se:

$$C_1 = \left[ (T_{s2} - T_{s1}) - \frac{\dot{Q}}{4k} (r_1^2 - r_2^2) \right] \ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)$$

$$C_2 = T_{s2} + \frac{\dot{Q}r_2^2}{4k} - \left[ (T_{s2} - T_{s1}) - \frac{\dot{Q}}{4k} (r_1^2 - r_2^2) \right] \ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)$$

Consequentemente, a distribuição de temperaturas é:

$$T = T_{s2} + \frac{\dot{Q}r_2^2}{4k} \left( 1 - \frac{r^2}{r_2^2} \right) - \left[ \frac{\dot{Q}r_2^2}{4k} \left( 1 - \frac{r_1^2}{r_2^2} \right) + (T_{s2} - T_{s1}) \right] \frac{\ln(r_2/r)}{\ln(r_2/r_1)}$$

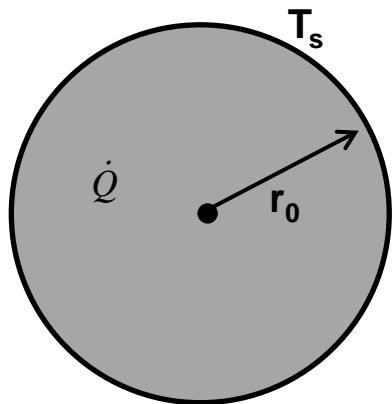
Aplicando a **Lei de Fourier**, tem-se a taxa de transferência de calor por condução:

$$Q_r = \dot{Q}\pi L r^2 - \frac{2\pi L k}{\ln(r_2/r_1)} \left[ \frac{\dot{Q}r_2^2}{4k} \left( 1 - \frac{r_1^2}{r_2^2} \right) + (T_{s2} - T_{s1}) \right]$$

# 4 . Condução Unidimensional com Geração

## 4.3 Geração em Sistemas Radiais

### c) Esfera



De acordo com as hipóteses adotadas anteriormente, a forma apropriada da **Equação da Difusão Térmica** em coordenadas esféricas será:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dT}{dr} \right) + \frac{\dot{Q}}{k} = 0$$

Separando as variáveis e integrando uma vez:

$$\int \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dT}{dr} \right) dr = \int -\frac{\dot{Q}}{k} r^2 dr \quad \longrightarrow \quad r^2 \frac{dT}{dr} = -\frac{\dot{Q}}{k} \frac{r^3}{3} + C_1$$

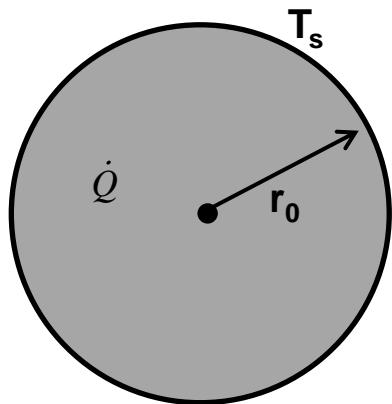
Separando as variáveis e integrando novamente:

$$\int \frac{dT}{dr} dr = \int \left( -\frac{\dot{Q}}{k} \frac{r}{3} + \frac{C_1}{r^2} \right) dr \quad \longrightarrow \quad T = -\frac{\dot{Q}}{k} \frac{r^2}{6} - \frac{C_1}{r} + C_2$$

# 4 . Condução Unidimensional com Geração

## 4.3 Geração em Sistemas Radiais

### c) Esfera



i) Esfera Maciça: no caso de uma esfera maciça, as condições de contorno são

$$\frac{dT}{dr} \Big|_{r=0} = 0 \quad (\text{condição de simetria}) \quad \text{e} \quad T(r = r_0) = T_s$$

Resolvendo a equação geral para as constantes de integração, tem-se:

$$C_1 = 0 \quad \text{e} \quad C_2 = T_s + \frac{\dot{Q}}{6k} r_0^2$$

Consequentemente, a distribuição de temperaturas é:

$$T = T_s + \frac{\dot{Q}r_0^2}{6k} \left( 1 - \frac{r^2}{r_0^2} \right)$$

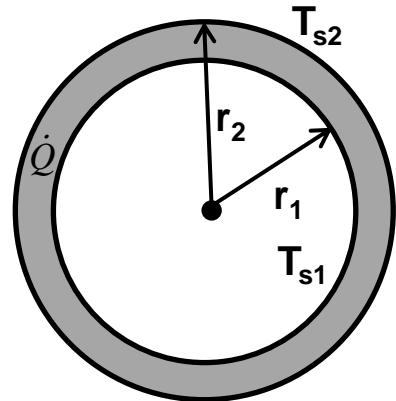
Aplicando a **Lei de Fourier**, tem-se a taxa de transferência de calor por condução:

$$Q_r = \frac{\dot{Q}4\pi r^3}{3}$$

# 4 . Condução Unidimensional com Geração

## 4.3 Geração em Sistemas Radiais

### c) Esfera



ii) Esfera Oca: no caso de uma esfera oca, as condições de contorno são

$$T(r = r_1) = T_{s1} \quad \text{e} \quad T(r = r_2) = T_{s2}$$

Resolvendo a equação geral para as constantes de integração, tem-se:

$$C_1 = \left[ (T_{s2} - T_{s1}) - \frac{\dot{Q}}{6k} (r_1^2 - r_2^2) \right] \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)^{-1}$$

$$C_2 = T_{s2} + \frac{\dot{Q}r_2^2}{6k} - \frac{1}{r_2} \left[ (T_{s2} - T_{s1}) - \frac{\dot{Q}}{6k} (r_1^2 - r_2^2) \right] \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)^{-1}$$

Consequentemente, a distribuição de temperaturas é:

$$T = T_{s2} + \frac{\dot{Q}r_2^2}{6k} \left( 1 - \frac{r^2}{r_2^2} \right) - \left[ \frac{\dot{Q}r_2^2}{6k} \left( 1 - \frac{r_1^2}{r_2^2} \right) + (T_{s2} - T_{s1}) \right] \frac{(1/r) - (1/r_2)}{(1/r_1) - (1/r_2)}$$

Aplicando a **Lei de Fourier**, tem-se a taxa de transferência de calor por condução:

$$Q_r = \frac{\dot{Q}4\pi r^3}{3} - \frac{4\pi k \left[ \dot{Q}r_2^2/6k \left( 1 - r_1^2/r_2^2 \right) + (T_{s2} - T_{s1}) \right]}{(1/r_1) - (1/r_2)}$$

## 4 . Condução Unidimensional com Geração

**Exercício Proposto 8:** Uma parede plana é composta por dois materiais, A e B. Na parede de material A há geração de calor uniforme  $\dot{Q} = 1,5 \times 10^6 \text{ W/m}^3$ ,  $k_A = 75 \text{ W/(m.K)}$  e a espessura é  $L_A = 50 \text{ mm}$ . A parede de material B não apresenta geração de calor,  $k_B = 150 \text{ W/(m.K)}$  e a sua espessura é  $L_B = 20 \text{ mm}$ . A superfície interna do material A está perfeitamente isolada, enquanto a superfície externa do material B é resfriada por uma corrente de água com  $T_\infty = 30^\circ\text{C}$  e  $h = 1000 \text{ W/(m}^2.\text{K)}$ . Determine a temperatura  $T_0$  da superfície isolada e a temperatura  $T_2$  da superfície resfriada.

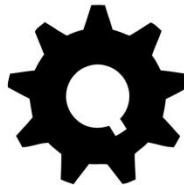
Considere a área da seção transversal unitária.

# Bibliografia

**INCROPERA, F.P. e DEWITT, D.P.** *Fundamentos de transferência de calor e massa*, 6<sup>a</sup> ed., LTC, 2008.

**ÇENGEL, Y.A e GHAJAR, A.J.**; *Transferência de calor e massa*, McGraw Hill, 4<sup>a</sup> edição, 2012.

**WELTY, J. R.; RORRER, G. L.; FOSTER, D.G.** *Fundamentos de Transferência de Momento, de Calor e de Massa*; tradução e revisão técnica Verônica Calado, 6. ed., Rio de Janeiro: LTC, 2017.



# Superfícies Estendidas

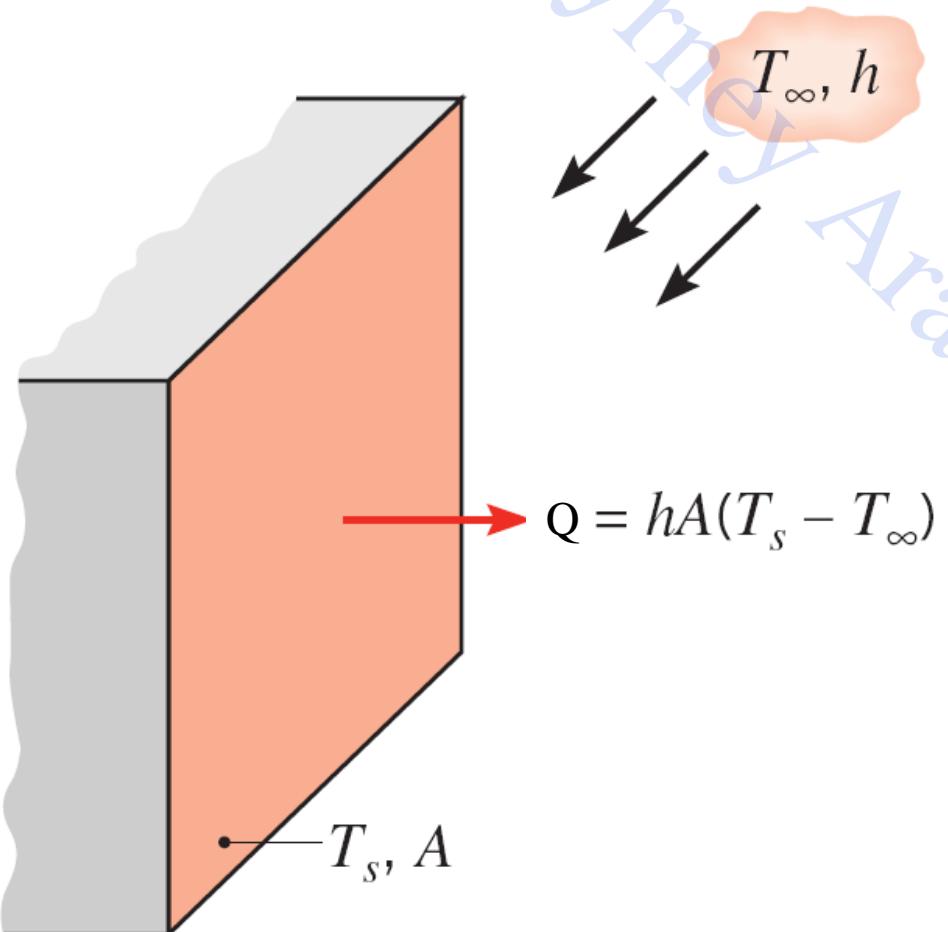
## Aletas

Professor Dyrney Araújo dos Santos  
**Universidade Federal de Goiás**  
**Curso: Graduação em Engenharia Química**  
**Disciplina: Fenômenos de Transporte 2**  
site: [www.dyrney.com](http://www.dyrney.com)

# 5 . Superfícies Aletadas

## 5.1 Introdução

Como podemos aumentar a taxa de Transferência de Calor entre um sólido e um fluido adjacente?



a) Aumentando o coeficiente de convecção

✓ Necessidade de aumento da velocidade do fluido;

✓ Inviável devido ao custo de potência nos sopradores e bombas.

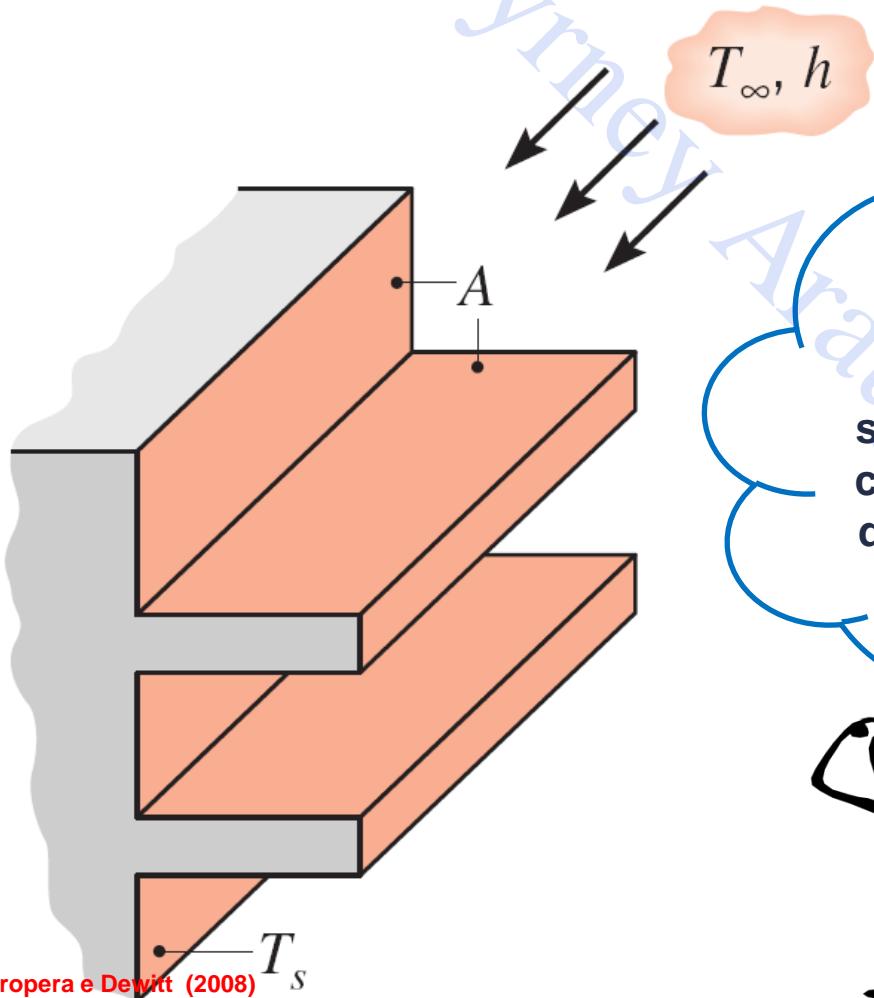
b) Aumentando a diferença de temperaturas, ou seja, diminuindo  $T_\infty$

✓ A redução de  $T_\infty$  é frequentemente impraticável.

# 5 . Superfícies Aletadas

## 5.1 Introdução

Como podemos aumentar a taxa de Transferência de Calor entre um sólido e um fluido adjacente?



**Solução Viável:** A taxa de transferência de calor pode ser elevada pelo aumento da área da superfície através da qual ocorre a convecção pelo emprego de aletas que se estendem da parede para o interior do fluido adjacente



# 5 . Superfícies Aletadas

## 5.1 Introdução

### Aplicações das Aletas

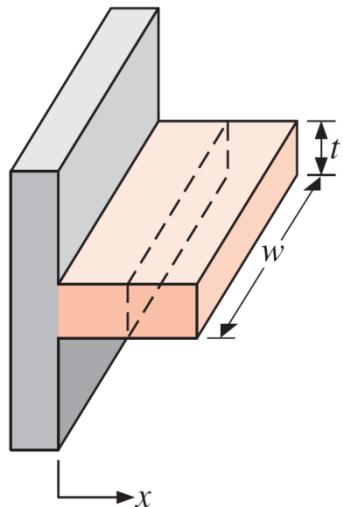
- Para resfriar motores a combustão (radiadores)
- Motores elétricos
- Processadores de computador
- Trocadores de calor em tubos aletados
- Promover troca térmica em um aparelho de ar condicionado



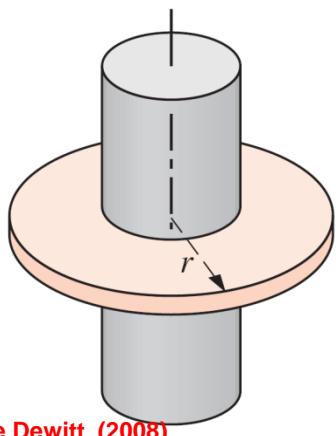
# 5 . Superfícies Aletadas

## 5.1 Introdução

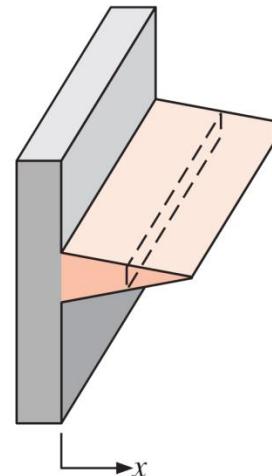
### Diferentes Configurações de Aletas



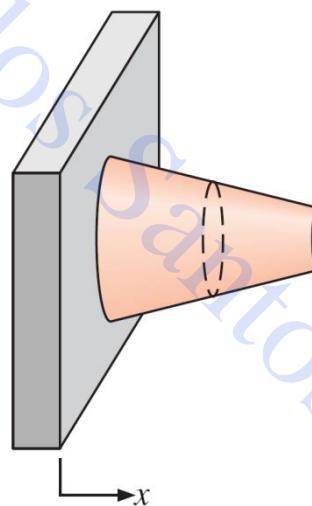
(a) Aleta Plana  
com seção  
transversal  
uniforme



(c) Aleta Anular



(b) Aleta Plana  
com seção  
transversal não  
uniforme



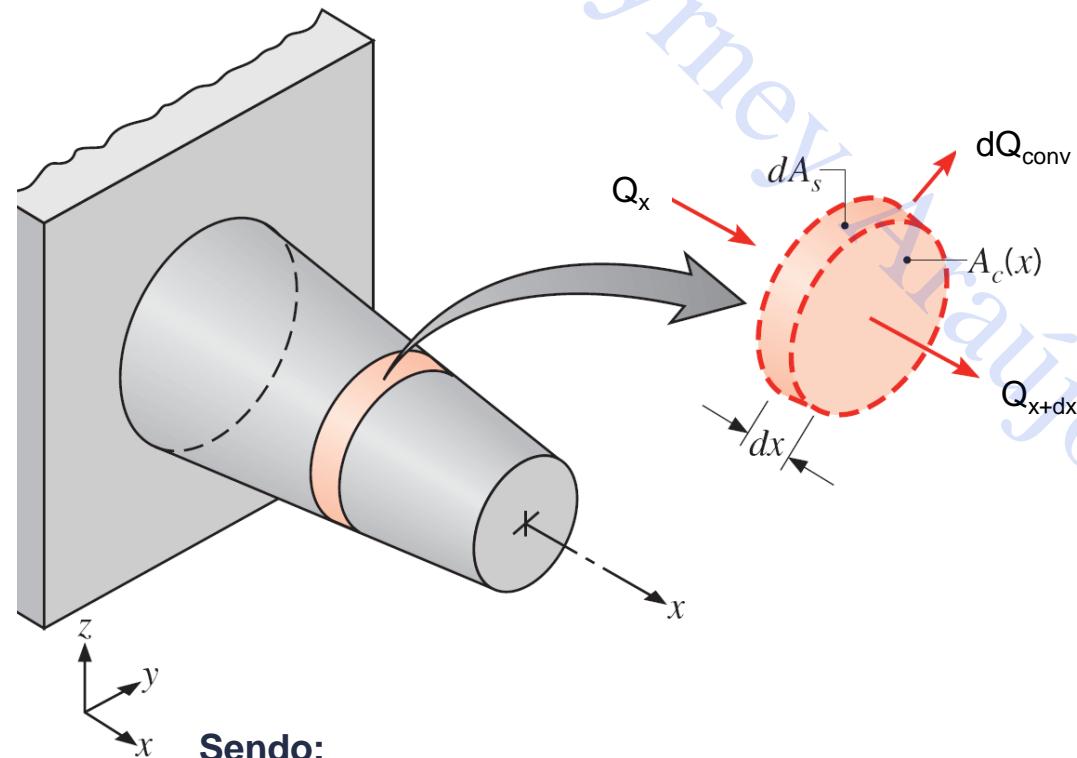
(d) Aleta  
Piniforme

# 5 . Superfícies Aletadas

## 5.2 Transferência de Calor em Superfícies Estendidas

### Dedução da Equação do Calor para Aletas

Fonte: Incropera e Dewitt (2008)



Sendo:

$A_c$  = área da seção reta;

$A_s$  = área superficial;

$Q_x$  = taxa de calor condutiva;

$dQ_{\text{conv}}$  = taxa de calor convectiva

### Hipóteses adotadas:

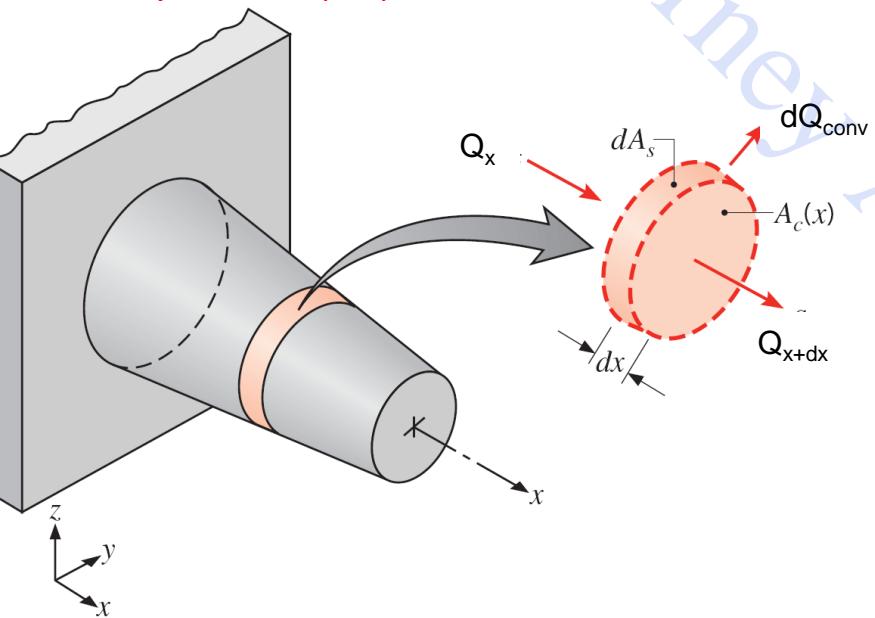
- Fenômeno ocorre em estado estacionário;
- Aleta fina: transferência nas direções  $y$  e  $z$  muito rápidas quando comparadas com a direção  $x$ . Logo  $T(x)$ ;
- Condutividade térmica constante;
- Coeficiente de película constante ao longo de toda a aleta.

# 5 . Superfícies Aletadas

## 5.2 Transferência de Calor em Superfícies Estendidas

### Dedução da Equação do Calor para Aletas

Fonte: Incropera e Dewitt (2008)



Sendo:

**A<sub>c</sub>** = área da seção reta;

**A<sub>s</sub>** = área superficial;

**Q<sub>x</sub>** = taxa de calor condutiva;

**dQ<sub>conv</sub>** = taxa de calor convectiva

Balanço de energia no volume infinitesimal

$$Q_x = Q_{x+dx} + dQ_{conv}$$

Pela **Lei de Fourier**, tem-se:

$$Q_x = -kA_c \frac{dT}{dx}$$

A taxa de condução de calor em **x+dx** é dada por:

$$Q_{x+dx} = Q_x + \frac{dQ_x}{dx} dx$$

Substituindo a **Lei de Fourier**, tem-se:

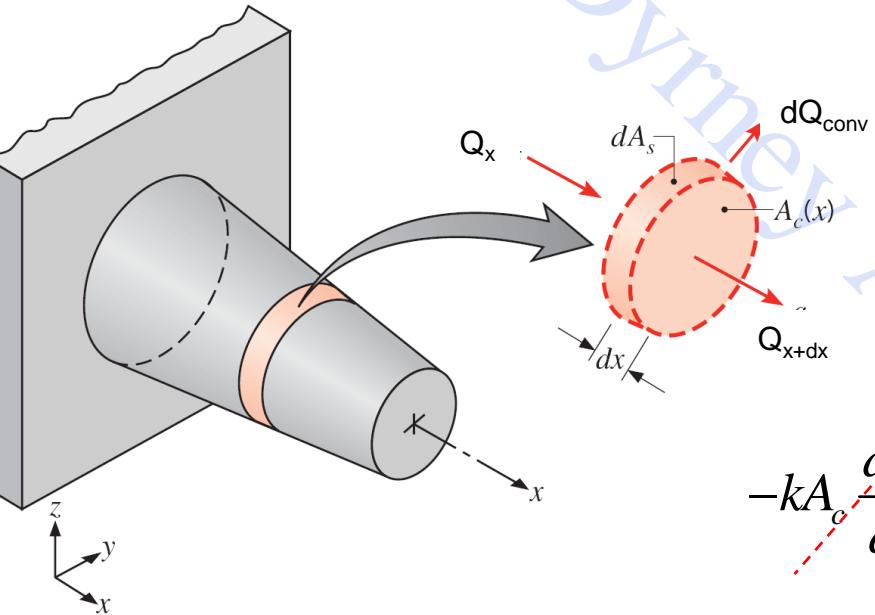
$$Q_{x+dx} = -kA_c \frac{dT}{dx} - k \frac{d}{dx} \left( A_c \frac{dT}{dx} \right) dx$$

# 5 . Superfícies Aletadas

## 5.2 Transferência de Calor em Superfícies Estendidas

### Dedução da Equação do Calor para Aletas

Fonte: Incropera e Dewitt (2008)



A taxa de transferência por convecção pode ser expressa como:

$$dQ_{conv} = h dA_s (T - T_\infty)$$

Substituindo as taxas no balanço de energia e rearranjando:

$$-k A_c \frac{dT}{dx} = -k A_c \frac{dT}{dx} - k \frac{d}{dx} \left( A_c \frac{dT}{dx} \right) dx + h dA_s (T - T_\infty)$$

$$-k \frac{d}{dx} \left( A_c \frac{dT}{dx} \right) dx + h dA_s (T - T_\infty) = 0$$

$$\frac{d}{dx} \left( A_c \frac{dT}{dx} \right) dx - \frac{h}{k} dA_s (T - T_\infty) = 0$$

Sendo:

$A_c$  = área da seção reta;

$A_s$  = área superficial;

$Q_x$  = taxa de calor condutiva;

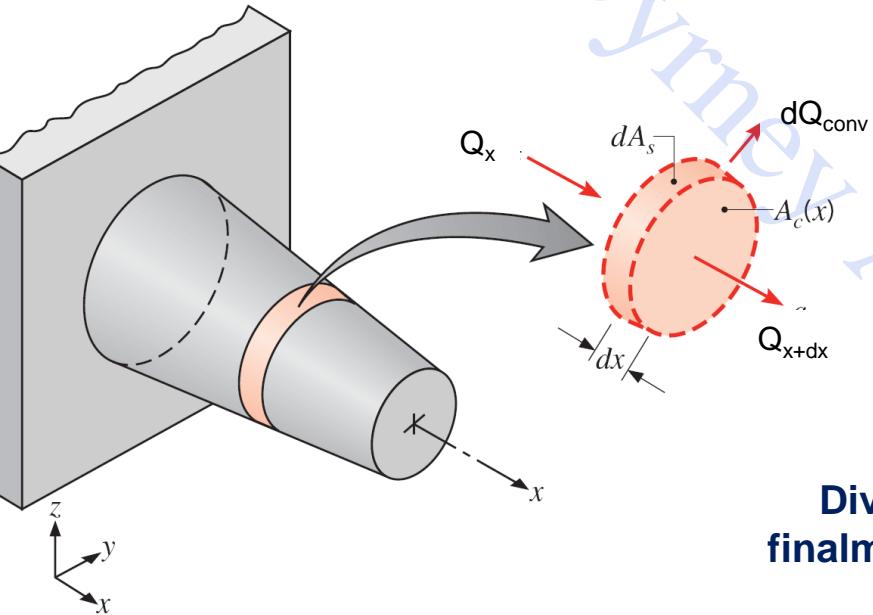
$dQ_{conv}$  = taxa de calor convectiva

# 5 . Superfícies Aletadas

## 5.2 Transferência de Calor em Superfícies Estendidas

### Dedução da Equação do Calor para Aletas

Fonte: Incropera e Dewitt (2008)



Visto que  $A_c = A_c(x)$ , pode-se aplicar a regra da cadeia,

$$A_c \frac{d^2 T}{dx^2} dx + \frac{dT}{dx} \frac{dA_c}{dx} dx - \frac{h}{k} dA_s (T - T_\infty) = 0$$

Dividindo tudo pelo elemento infinitesimal  $dx$ , tem-se, finalmente a Forma Geral da Equação do Calor para Aletas:

$$\frac{d^2 T}{dx^2} + \left( \frac{1}{A_c} \frac{dA_c}{dx} \right) \frac{dT}{dx} - \left( \frac{1}{A_c k} \frac{dA_s}{dx} \right) (T - T_\infty) = 0$$

Sendo:

$A_c$  = área da seção reta;

$A_s$  = área superficial;

$Q_x$  = taxa de calor condutiva;

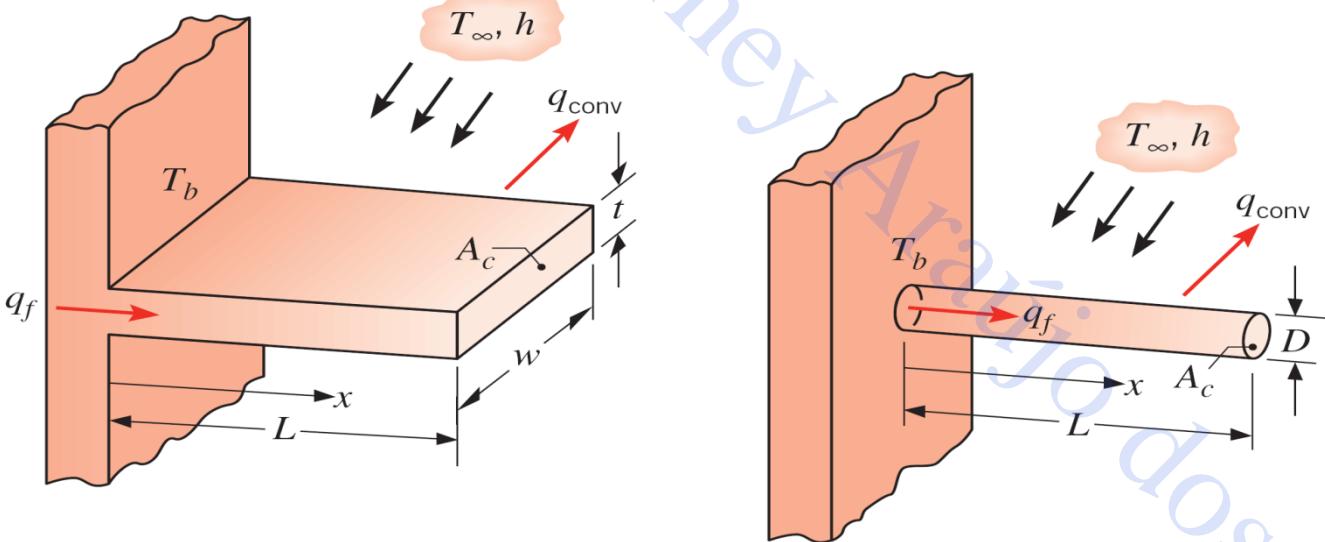
$dQ_{conv}$  = taxa de calor convectiva

# 5 . Superfícies Aletadas

## 5.3 Aletas com Área de Seção Transversal Uniforme

**Considerações:** aletas planas retangulares ou piniformes de seção transversal uniforme ( $A_c$ ). Cada aleta está fixada a uma superfície base, onde  $T(0) = T_b$ , e estende para o interior de um fluido à temperatura  $T_\infty$ .

Fonte: Incropera e Dewitt (2008)



Para esta aletas

- $A_c$  é constante.
- $A_s = Px$ , sendo  $A_s$  a área superficial e  $P$  o perímetro.

$$\text{Aleta plana retangular: } A_c = wt \quad P = 2w + 2t$$

$$\text{Aleta Piniforme: } A_c = \frac{\pi D^2}{4} \quad P = \pi D$$

# 5 . Superfícies Aletadas

## 5.3 Aletas com Área de Seção Transversal Uniforme

A Equação Geral de Calor para Aletas é escrita da seguinte forma:

$$\frac{d^2T}{dx^2} + \left( \frac{1}{A_c} \frac{dA_c}{dx} \right) \frac{dT}{dx} - \left( \frac{1}{A_c} \frac{h}{k} \frac{dA_S}{dx} \right) (T - T_\infty) = 0$$

No caso de aletas com área da seção transversal constante, tem-se:

$$\frac{dA_c}{dx} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{dA_S}{dx} = P$$

Substituindo na equação anterior, tem-se:

$$\frac{d^2T}{dx^2} + \left( \frac{1}{A_c} \cdot 0 \right) \frac{dT}{dx} - \left( \frac{1}{A_c} \frac{h}{k} P \right) (T - T_\infty) = 0$$

Logo,

$$\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{hP}{kA_c} (T - T_\infty) = 0$$

# 5 . Superfícies Aletadas

## 5.3 Aletas com Área de Seção Transversal Uniforme

Para simplificar a forma dessa equação, é comum realizar a seguinte mudança de variável, em que **T** (temperatura) é substituída por **θ** ("excesso de temperatura")

$$\theta(x) = T(x) - T_{\infty}$$

Derivando-se esta relação duas vezes, tem-se:

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{dT}{dx}$$

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} = \frac{d^2T}{dx^2}$$

Após substituir na equação original, tem-se uma equação diferencial de segunda ordem, linear e homogênea com coeficientes constantes

$$\boxed{\frac{d^2\theta}{dx^2} - m^2\theta = 0}$$

sendo  $m = \sqrt{\frac{hP}{kA_c}}$

# 5 . Superfícies Aletadas

## 5.3 Aletas com Área de Seção Transversal Uniforme

A solução geral da equação anterior tem a seguinte forma:

$$\theta(x) = C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx}$$

Em  $x = 0$ , tem-se que  $T(x = 0) = T_b$ , ou em termos de  $\theta$ ,  $\theta(x = 0) = \theta_b$ . A segunda condição, especificada na extremidade da aleta ( $x = L$ ), envolve quatro diferentes situações físicas

### CASO A: Transferência de calor por convecção na extremidade ( $x = L$ )

Condição de contorno

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta(x=0) = T_b - T_{\infty} = \theta_b \\ -kA_c \frac{dT}{dx} \Big|_{x=L} = hA_c [T(L) - T_{\infty}] \quad \text{ou} \quad -k \frac{d\theta}{dx} \Big|_{x=L} = h\theta(L) \end{array} \right.$$

# 5 . Superfícies Aletadas

## 5.3 Aletas com Área de Seção Transversal Uniforme

Substituindo as condições de contorno na equação geral, tem-se:

$$\theta_b = C_1 + C_2$$

$$h(C_1 e^{mL} + C_2 e^{-mL}) = km(C_2 e^{-mL} + C_1 e^{mL})$$

Após explicitar  $C_1$  e  $C_2$ , pode-se mostrar, após alguma manipulação algébrica, que

$$\frac{\theta}{\theta_b} = \frac{\cosh[m(L-x)] + (h/mk) \operatorname{senh}[m(L-x)]}{\cosh(mL) + (h/mk) \operatorname{senh}(mL)}$$

# 5 . Superfícies Aletadas

## 5.3 Aletas com Área de Seção Transversal Uniforme

### PARA RECORDAR

Relações trigonométricas:

$$\operatorname{senh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{\operatorname{senh}(x)}{\cosh(x)}$$

Derivadas de funções trigonométricas:

**Se**  $f(x) = \operatorname{senh}(x) \rightarrow f'(x) = \cosh(x)$

**Se**  $f(x) = \cosh(x) \rightarrow f'(x) = \operatorname{senh}(x)$

**Se**  $f(x) = tgh(x) \rightarrow f'(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)}$

# 5 . Superfícies Aletadas

## 5.3 Aletas com Área de Seção Transversal Uniforme

O procedimento mais simples para se determinar a taxa de calor perdida pela aleta  **$Q_a$  (na base da aleta)** é a aplicação da Lei de Fourier:

$$Q_a = Q_b = -kA_c \frac{dT}{dx} \Big|_{x=0} = -kA_c \frac{d\theta}{dx} \Big|_{x=0}$$

Através da distribuição de temperaturas,  $\theta(x)$ ,  $Q_a$  pode ser determinada como:

$$Q_a = \sqrt{hPkA_c} \theta_b \frac{\operatorname{senh}(mL) + (h/mk)\cosh(mL)}{\cosh(mL) + (h/mk)\operatorname{senh}(mL)}$$

**CASO B: Extremidade da aleta é adiabática ( $x = L$ )**

Condição de contorno

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta(x=0) = T_b - T_\infty = \theta_b \\ \frac{dT}{dx} \Big|_{x=L} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{d\theta}{dx} \Big|_{x=L} = 0 \end{array} \right.$$

# 5 . Superfícies Aletadas

## 5.3 Aletas com Área de Seção Transversal Uniforme

Substituindo as condições de contorno na equação geral, tem-se:

$$\theta_b = C_1 + C_2 \quad \text{e} \quad C_1 e^{mL} - C_2 e^{-mL} = 0$$

Após explicitar  $C_1$  e  $C_2$ , pode-se mostrar, após alguma manipulação algébrica, que

$$\frac{\theta}{\theta_b} = \frac{\cosh[m(L-x)]}{\cosh(mL)}$$

Através da distribuição de temperaturas,  $\theta(x)$ ,  $Q_a$  pode ser determinada por meio da lei de Fourier

$$Q_a = \sqrt{hP k A_c} \theta_b tgh(mL)$$

# 5 . Superfícies Aletadas

## 5.3 Aletas com Área de Seção Transversal Uniforme

**CASO C:** Temperatura na extremidade da aleta é especificada ( $x=L$ )

Condição de contorno

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta(x=0) = T_b - T_{\infty} = \theta_b \\ \theta(x=L) = T_L - T_{\infty} = \theta_L \end{array} \right.$$

Substituindo as condições de contorno na equação geral, tem-se:

$$\theta_b = C_1 + C_2 \quad \text{e} \quad \theta_L = C_1 e^{mL} + C_2 e^{-mL}$$

Após explicitar  $C_1$  e  $C_2$ , pode-se mostrar, após alguma manipulação algébrica, que

$$\frac{\theta}{\theta_b} = \frac{(\theta_L/\theta_b) \operatorname{senh}(mx) + \operatorname{senh}[m(L-x)]}{\operatorname{senh}(mL)}$$

# 5 . Superfícies Aletadas

## 5.3 Aletas com Área de Seção Transversal Uniforme

Através da distribuição de temperaturas,  $\theta(x)$ ,  $Q_a$  pode ser determinada por meio da **Lei de Fourier**

$$Q_a = \sqrt{hPkA_c} \theta_b \frac{\cosh(mL) - \theta_L/\theta_b}{\sinh(mL)}$$

**CASO D: Aleta muito Longa ( $L \rightarrow \infty$  implica que  $\theta(L) \rightarrow 0$ )**

Condição de contorno

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta(x=0) = T_b - T_\infty = \theta_b \\ \theta(x=L) = T_\infty - T_\infty = 0 \end{array} \right.$$

Substituindo as condições de contorno na equação geral, tem-se:

$$\theta_b = C_1 + C_2 \quad \text{e} \quad C_1 e^{mL} + C_2 e^{-mL} = 0$$

# 5 . Superfícies Aletadas

## 5.3 Aletas com Área de Seção Transversal Uniforme

Após explicitar  $C_1$  e  $C_2$ , pode-se mostrar, após alguma manipulação algébrica, que

$$\frac{\theta}{\theta_b} = e^{-mx}$$

Através da distribuição de temperaturas,  $\theta(x)$ ,  $Q_a$  pode ser determinada por meio da lei de Fourier

$$Q_a = \sqrt{hPkA_c} \theta_b$$

# 5 . Superfícies Aletadas

## 5.4 Resumo: distribuição de temperaturas e perda de calor em aletas com Área de Seção Transversal Uniforme

Caso	Distribuição de Temperatura ( $\theta/\theta_b$ )	Transferência de calor na Aleta ( $Q_a$ )
A	$\frac{\cosh[m(L-x)] + (h/mk) \operatorname{senh}[m(L-x)]}{\cosh(mL) + (h/mk) \operatorname{senh}(mL)}$	$M \frac{\operatorname{senh}(mL) + (h/mk) \cosh(mL)}{\cosh(mL) + (h/mk) \operatorname{senh}(mL)}$
B	$\frac{\cosh[m(L-x)]}{\cosh(mL)}$	$Mtgh(mL)$
C	$\frac{(\theta_L/\theta_b) \operatorname{senh}(mx) + \operatorname{senh}[m(L-x)]}{\operatorname{senh}(mL)}$	$M \frac{\cosh(mL) - \theta_L/\theta_b}{\operatorname{senh}(mL)}$
D	$e^{-mx}$	$M$

Sendo:  $\theta(x) = T(x) - T_\infty$

$$m = \sqrt{hP/kA_c}$$

$$\theta_b(x) = \theta(0) = T_b - T_\infty$$

$$M = \sqrt{hPkA_c} \theta_b$$

## 5 . Superfícies Aletadas

**Exercício Proposto 9:** Sejam dois bastões longos e delgados de mesmo diâmetro, porém feitos de materiais diferentes. Uma extremidade de cada bastão está fixada a uma superfície (base) mantida a  $100^{\circ}\text{C}$ , enquanto as suas superfícies estão expostas ao ar ambiente a  $20^{\circ}\text{C}$ . Ao mover ao longo do comprimento de cada bastão um termopar, foram observadas temperaturas iguais nas posições  $x_A = 0,15 \text{ m}$  e  $x_B = 0,075 \text{ m}$ , sendo  $x$  medido a partir da base. Se a condutividade térmica do bastão A é conhecida e igual a  $k_A = 70 \text{ W/(m.K)}$ , determine o valor de  $k_B$  para o bastão B.

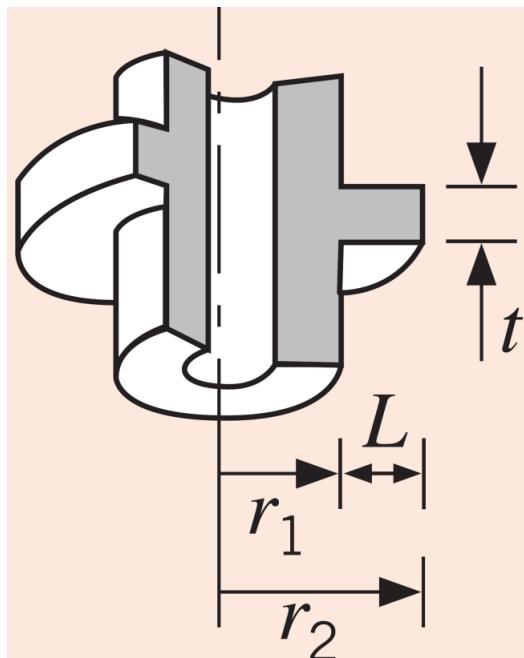
Araújo dos Santos

# 5 . Superfícies Aletadas

## 5.5 Aletas com Área de Seção Transversal Não Uniforme

**Considerações:** aletas em que a seção reta transversal à transferência térmica é variável.

**Exemplos:** aletas triangulares, cônicas, parabólicas e anulares.



Considere o caso particular de uma aleta anular

- Embora a espessura seja uniforme ( $t$  independe de  $r$ ), a área da seção transversal e a área superficial variam com  $r$

$$A_c = 2\pi rt \quad \text{e} \quad A_S = 2\pi(r^2 - r_1^2) \quad \text{sendo} \quad r_1 \leq r \leq r_2$$

A forma geral da Equação de Calor para Aletas é:

$$\frac{d^2T}{dr^2} + \left( \frac{1}{A_c} \frac{dA_c}{dr} \right) \frac{dT}{dr} - \left( \frac{1}{A_c} \frac{h}{k} \frac{dA_S}{dr} \right) (T - T_\infty) = 0$$

Fonte: Incropera e Dewitt (2008)

# 5 . Superfícies Aletadas

## 5.5 Aletas com Área de Seção Transversal Não Uniforme

Substituindo as áreas correspondentes e derivando-as, tem-se:

$$\frac{d^2T}{dr^2} + \left( \frac{I}{2\pi rt} 2\pi t \right) \frac{dT}{dr} - \left( \frac{I}{2\pi rt} \frac{h}{k} 4\pi r \right) (T - T_\infty) = 0$$

Logo,

$$\frac{d^2T}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} - \frac{2h}{kt} (T - T_\infty) = 0$$

Realizando a substituição de variáveis na equação anterior

$$\theta = T - T_\infty \quad \text{e} \quad m^2 = \frac{2h}{kt} \quad (\text{considerando a espessura } t \text{ muito menor do que o comprimento de arco da aleta anular})$$

Tem-se,

$$\frac{d^2\theta}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\theta}{dr} - m^2 \theta = 0$$

Equação de Bessel  
 Modificada de Ordem  
 Zero

# 5 . Superfícies Aletadas

## 5.5 Aletas com Área de Seção Transversal Não Uniforme

A solução geral da Equação de Bessel Modificada de Ordem Zero é

$$\theta(r) = C_1 I_0(mr) + C_2 K_0(mr)$$

sendo -

$I_0$  = função de Bessel de ordem zero de primeiro tipo

$K_0$  = função de Bessel de ordem zero de segundo tipo

Exemplo de Condição de Contorno: a título de exemplo, se a temperatura da base for conhecida  $\theta(r = r_1) = \theta_b$  e a extremidade supostamente adiabática  $d\theta/dr = 0$  em  $r = r_2$ , a solução torna-se:

$$\frac{\theta}{\theta_b} = \frac{I_0(mr)K_1(mr_2) + K_0(mr)I_1(mr_2)}{I_0(mr_1)K_1(mr_2) + K_0(mr_1)I_1(mr_2)}$$

sendo -

$I_1$  = função de Bessel de primeira ordem de primeiro tipo

$K_1$  = função de Bessel de primeira ordem de segundo tipo

# 5 . Superfícies Aletadas

## 5.5 Aletas com Área de Seção Transversal Não Uniforme

A taxa de calor perdida pela aleta é representada por

$$Q_a = -kA_c \frac{dT}{dr} \Big|_{r=r_l} = -k[2\pi r_l t] \frac{d\theta}{dr} \Big|_{r=r_l}$$

Logo,

$$Q_a = 2\pi k r_l t \theta_b m \frac{K_1(mr_1) I_1(mr_2) - I_1(mr_1) K_1(mr_2)}{K_0(mr_1) I_1(mr_2) + I_0(mr_1) K_1(mr_2)}$$

As funções de Bessel são dadas em forma de série, como abaixo, ou podem ser encontradas tabeladas (**Apêndice B do livro do Incropora**):

$$I_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{n+2k}}{k! \Gamma(n+k+1)}$$

e

$$K_n(x) = (-1)^{n+1} [ \ln(x/2) + \gamma ] I_n(x) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k (n-k-1)! (x/2)^{2k-n}$$

$$+ \frac{(-1)^n}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{n+2k}}{k!(n+k)!} [\phi(k) + \phi(n+k)]$$

$$\phi(k) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{k}$$

# 5 . Superfícies Aletadas

## 5.6 Desempenho de Aletas

**Observações a serem consideradas no estudo de aletas:**

- A utilização das aletas evidencia o aumento da transferência de calor através do aumento da área superficial efetiva
- Aleta também evidencia uma resistência condutiva à transferência de calor na superfície original
- Não existe qualquer garantia que a taxa de calor irá aumentar com o uso de aletas
- Desta forma será necessário fazer um estudo para verificar se a utilização da aleta será conveniente

# 5 . Superfícies Aletadas

## 5.6 Desempenho de Aletas

### a) Efetividade da Aleta

A efetividade da aleta ( $\varepsilon_a$ ) é definida como sendo a razão entre a taxa de transferência de calor da aleta e a taxa de transferência de calor que existiria sem a presença da aleta

$$\varepsilon_a = \frac{Q_a}{hA_{c,b}\theta_b}$$

sendo

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_a = \text{taxa de calor perdida na aleta} \\ A_{c,b} = \text{área da seção transversal da aleta na sua base} \\ \theta_b = T_b - T_\infty \end{array} \right.$$

#### Observações:

- 1) Em qualquer projeto razoável, o valor da efetividade ( $\varepsilon_a$ ) deve ser o maior possível e, em geral, o uso de aletas será raramente justificado a não ser que  $\varepsilon_a \geq 2$ .
- 2) Para qualquer uma das quatro condições na extremidade, a efetividade é dada pela divisão de  $Q_a$  por  $hA_{c,b}\theta_b$ .
- 3) Embora a instalação de aletas altere o coeficiente convectivo do sistema, esse efeito é normalmente desprezível.

# 5 . Superfícies Aletadas

## 5.6 Desempenho de Aletas

### a) Efetividade da Aleta

A título de exemplo, abaixo é apresentada uma expressão para a efetividade de aletas com área da seção reta constante e comprimento “infinito” (Caso D):

Para este caso, tem-se que a taxa de calor perdida na aleta é:

$$Q_a = \sqrt{hPkA_c} \theta_b$$



$$\varepsilon_a = \left( \frac{kP}{hA_c} \right)^{1/2}$$

Considerações importantes sobre a equação acima:

- 1) quanto maior a condutividade da aleta, maior a sua efetividade (alumínio, cobre, etc., são indicados na construção de aletas);
- 2) a efetividade aumenta com o aumento da razão entre o perímetro e a área da seção transversal (uso de aletas finas é indicado);

# 5 . Superfícies Aletadas

## 5.6 Desempenho de Aletas

### a) Efetividade da Aleta

A título de exemplo, abaixo é apresentada uma expressão para a efetividade de aletas com área da seção reta constante e comprimento “infinito” (Caso D):

Para este caso, tem-se que a taxa de calor perdida na aleta é:

$$Q_a = \sqrt{hPkA_c} \theta_b$$



$$\varepsilon_a = \left( \frac{kP}{hA_c} \right)^{1/2}$$

Considerações importantes sobre a equação acima:

3) aletas são indicadas nos casos em que o coeficiente convectivo ( $h$ ) é pequeno. Logo, aletas **são instaladas do lado do escoamento com menor coeficiente convectivo**. Ex: parede que separa o escoamento de um líquido e gás, as aletas devem ser instaladas do lado do gás;

4) esta equação fornece um limite superior para a efetividade (quando  $L$  tende a infinito). Porém, é de senso comum que **99% da taxa máxima são atingidos quando  $L = 2,65/m$** .

# 5 . Superfícies Aletadas

## 5.6 Desempenho de Aletas

### b) Eficiência de uma Aleta

A eficiência de uma aleta ( $\eta_a$ ) é definida como a razão entre a taxa de calor realmente perdida pela taxa de calor que seria perdida se toda a aleta estivesse à temperatura da base (**caso ideal**).

$$\eta_a = \frac{Q_a}{Q_{max}} = \frac{Q_a}{hA_a\theta_b}$$

sendo  $A_a$  = área superficial da aleta

#### Observações:

- 1) O potencial motriz máximo para a convecção é a diferença entre as temperaturas da base ( $x=0$ ) e do fluido,  $\theta_b = T_b - T_\infty$ ;
- 2) Assim, a taxa máxima na qual uma aleta poderia dissipar energia é a taxa que existiria se toda a superfície da aleta estivesse na temperatura da base;
- 3) Toda aleta é caracterizada por uma resistência condutiva não nula, logo, a eficiência de uma aleta nunca será 100%

# 5 . Superfícies Aletadas

## 5.6 Desempenho de Aletas

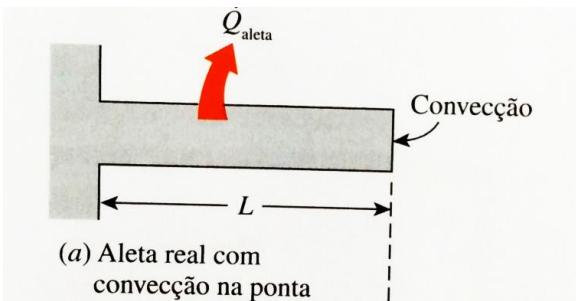
### b) Eficiência de uma Aleta

**A título de exemplo:** Considere uma Aleta plana com seção transversal uniforme e extremidade adiabática. Neste caso a expressão da eficiência da aleta torna-se,

$$Q_a = \sqrt{hPkA_c} \theta_b tgh(mL)$$

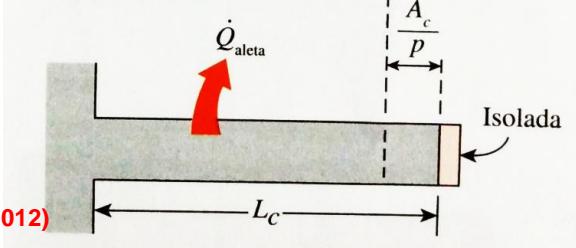
$$\eta_a = \frac{\sqrt{hPkA_c} \theta_b tgh(mL)}{hPL\theta_b} = \frac{tgh(mL)}{mL}$$

**Estratégia simplificadora** – Em vez da expressão complicada para transferência de calor de uma aleta plana retangular com extremidade ativa (convecção na ponta da aleta), usa-se a equação acima (extremidade adiabática) juntamente com um comprimento corrigido:



**Aleta Retangular**

$$L_c = L + \left( \frac{t}{2} \right)$$



**Aleta Piniforme**

$$L_c = L + \left( \frac{D}{4} \right)$$

Fonte: Çengel e Ghajar (2012)

# 5 . Superfícies Aletadas

## 5.6 Desempenho de Aletas

### b) Eficiência de uma Aleta

**A título de exemplo:** Assim, com convecção na extremidade, a taxa de transferência de calor na aleta pode ser aproximada por

$$Q_a = \sqrt{hP k A_c} \theta_b \operatorname{tgh}(mL_c) \longrightarrow \eta_a = \frac{\operatorname{tgh}(mL_c)}{mL_c}$$

Se  $w \gg t$ , o perímetro pode ser aproximado por  $P = 2w$  e

$$mL_c = \left( \frac{hP}{kA_c} \right)^{1/2} L_c = \left( \frac{2h}{kt} \right)^{1/2} L_c$$

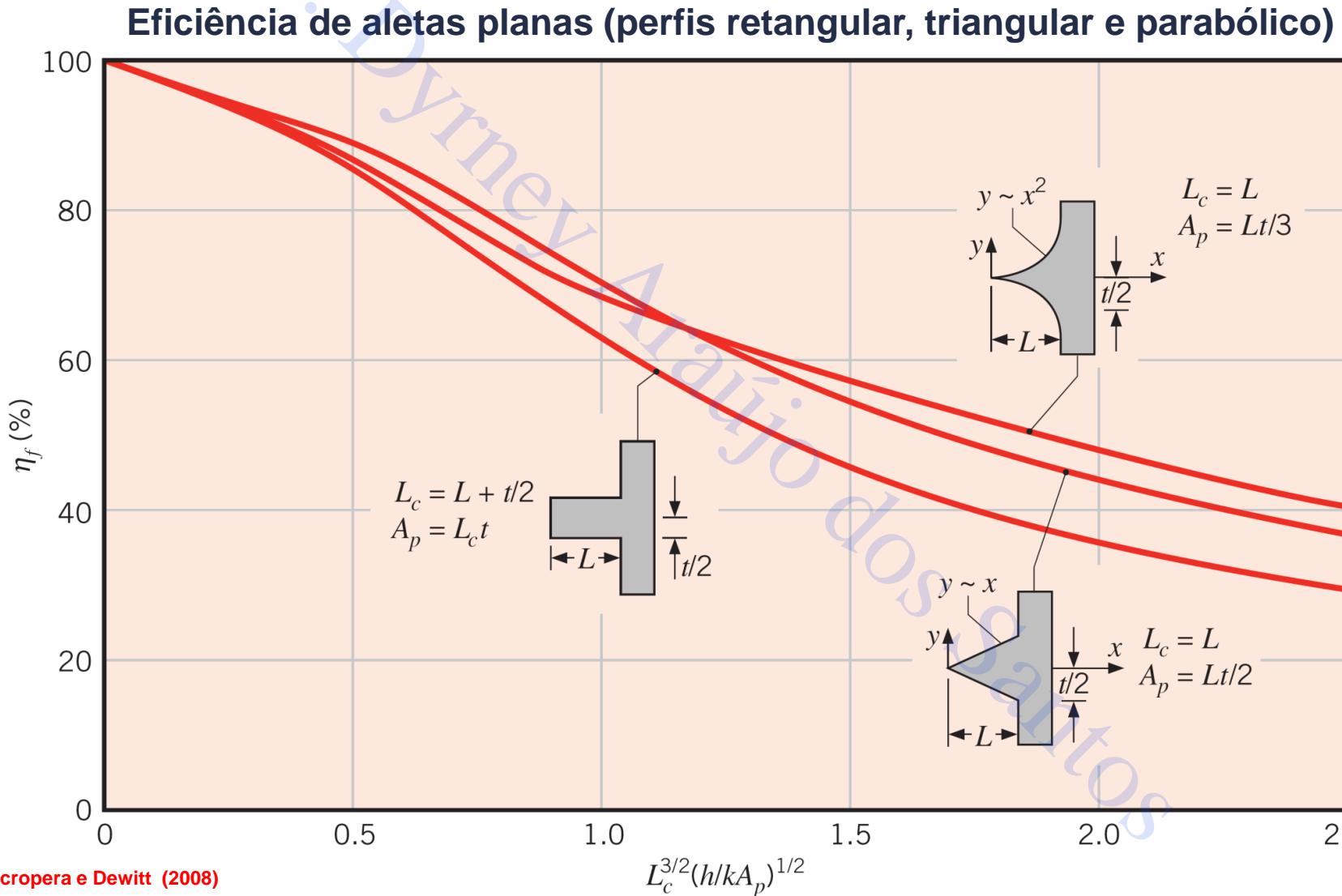
Multiplicando numerador e denominador por  $L_c^{1/2}$  e introduzindo  $A_p = L_c t$  (área corrigida)

$$mL_c = \left( \frac{2h}{kA_p} \right)^{1/2} L_c^{3/2}$$

Logo, a eficiência de uma aleta retangular com convecção na extremidade pode ser plotada ou expressa em função desta variável

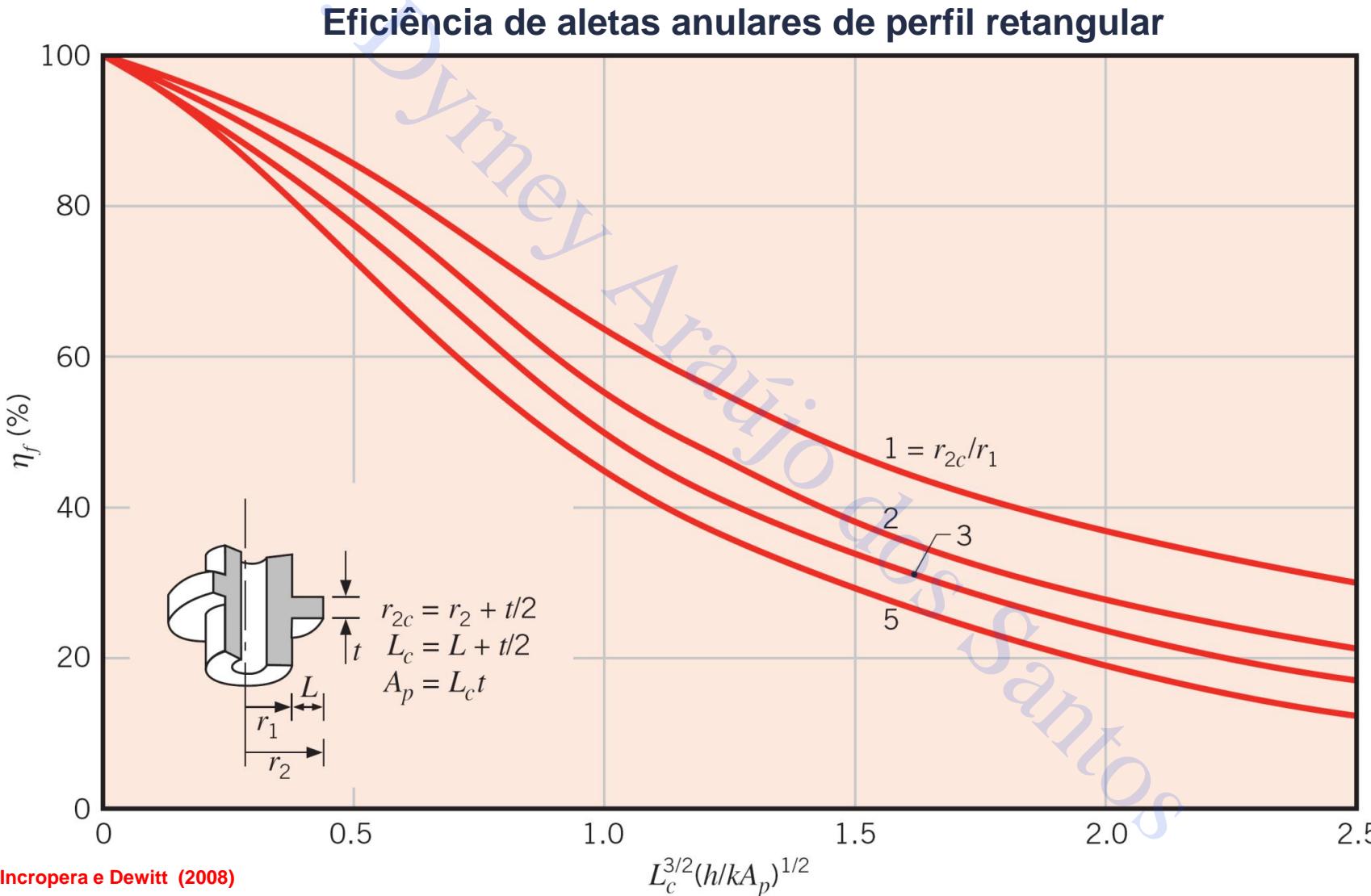
# 5 . Superfícies Aletadas

## 5.6 Desempenho de Aletas



# 5 . Superfícies Aletadas

## 5.6 Desempenho de Aletas



# 5 . Superfícies Aletadas

## 5.6 Desempenho de Aletas

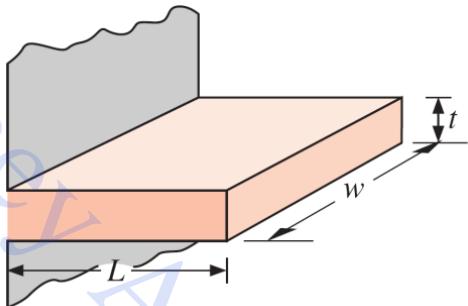
### Eficiências de Perfis de Aletas comuns

#### i) Aleta Plana Retangular

$$A_a = 2wL_c$$

$$L_c = L + (t / 2)$$

$$A_p = tL$$

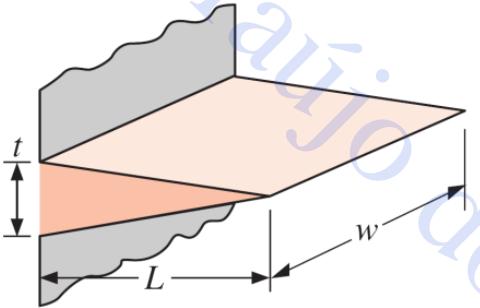


$$\eta_a = \frac{\operatorname{tgh}(mL_c)}{mL_c}$$

#### ii) Aleta Plana Triangular

$$A_a = 2w \left[ L^2 + (t / 2)^2 \right]^{1/2}$$

$$A_p = (t / 2)L$$



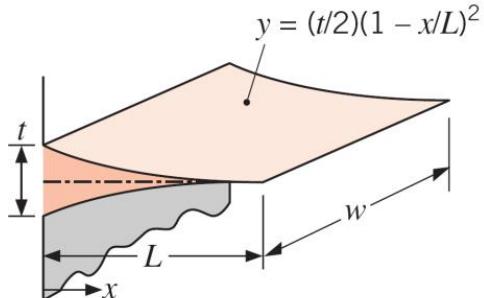
$$\eta_a = \frac{1}{mL} \frac{I_1(2mL)}{I_0(2mL)}$$

#### iii) Aleta Plana Parabólica

$$A_a = w \left[ C_l L + \left( L^2 / t \right) \ln \left( t / L + C_l \right) \right]$$

$$C_l = \left[ 1 + \left( t / L \right)^2 \right]^{1/2}$$

$$A_p = (t/3)L$$



$$\eta_a = \frac{2}{\left[ 4(mL)^2 + 1 \right]^{1/2} + 1}$$

Fonte: Incropera e Dewitt (2008)

# 5 . Superfícies Aletadas

## 5.6 Desempenho de Aletas

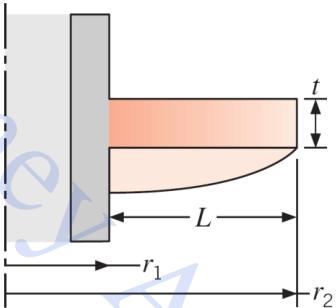
### Eficiências de Perfis de Aletas comuns

#### vi) Aleta Circular Retangular

$$A_a = 2\pi(r_{2c}^2 - r_1^2)$$

$$r_{2c} = r_2 + (t/2)$$

$$V = \pi(r_2^2 - r_1^2)t$$



$$\eta_a = C_2 \frac{I_1(mr_{2c})K_1(mr_1) - K_1(mr_{2c})I_1(mr_1)}{I_0(mr_1)K_1(mr_{2c}) + K_0(mr_1)I_1(mr_{2c})}$$

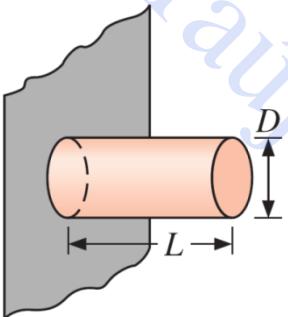
$$C_2 = \frac{(2r_1/m)}{(r_{2c}^2 - r_1^2)}$$

#### v) Aleta em forma de Pino Retangular

$$A_a = \pi DL_c$$

$$L_c = L + (D/4)$$

$$V = (\pi D^2 / 4)L$$

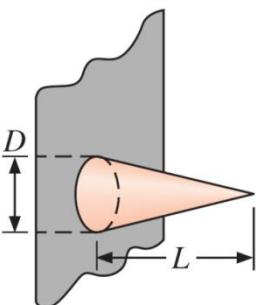


$$\eta_a = \frac{\operatorname{tgh}(mL_c)}{mL_c}$$

#### vi) Aleta em forma de Pino Triangular

$$A_a = \frac{\pi D}{2} \left[ L^2 + (D/2)^2 \right]^{1/2}$$

$$V = (\pi/12)D^2L$$



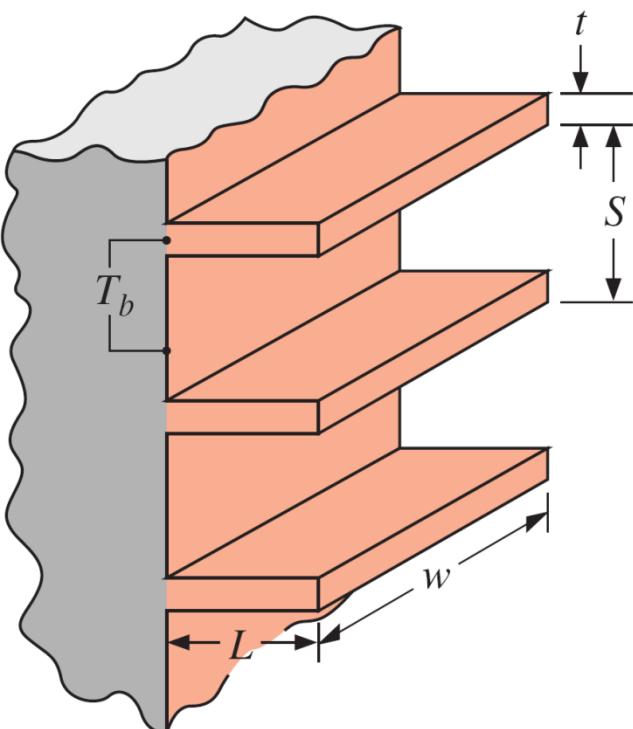
$$\eta_a = \frac{2}{mL} \frac{I_2(2mL)}{I_1(2mL)}$$

# 5 . Superfícies Aletadas

## 5.6 Desempenho de Aletas

### c) Eficiência Global da Superfície ( $\eta_G$ ) – Para conjunto de Aletas

Representa a razão entre o calor realmente transferido pelo sistema aletado pelo calor que este mesmo sistema transferiria se todo ele (inclusive a superfície base) estivesse à temperatura da base (caso ideal).



$$\eta_G = \frac{Q_T}{Q_{max}} = \frac{Q_T}{hA_T\theta_b}$$

em que  $A_T = NA_a + A_b$

Sendo,

$Q_T$  = taxa de calor realmente perdida para o ambiente

$A_T$  = área total do sistema (aletas + superfície primária)

$A_a$  = área da superfície de cada aleta

$A_b$  = área da superfície primária (não encoberta pelas aletas)

$N$  = número total de aletas

# 5 . Superfícies Aletadas

## 5.6 Desempenho de Aletas

### c) Eficiência Global da Superfície ( $\eta_G$ ) – Para conjunto de Aletas

A taxa total de transferência de calor por convecção nas aletas e na superfície primária (**sem aletas**) pode ser representada por:

$$Q_T = N\eta_a h A_a \theta_b + h A_b \theta_b$$

na qual **h** é considerado praticamente invariável, seja na presença de uma aleta ou conjunto delas e  $\eta_a$  é a eficiência de uma aleta.

Assim,

$$Q_T = h \left[ N\eta_a A_a + (A_T - NA_a) \right] \theta_b \quad \longrightarrow \quad Q_T = h A_T \left[ 1 - \frac{NA_a}{A_T} (1 - \eta_a) \right] \theta_b$$

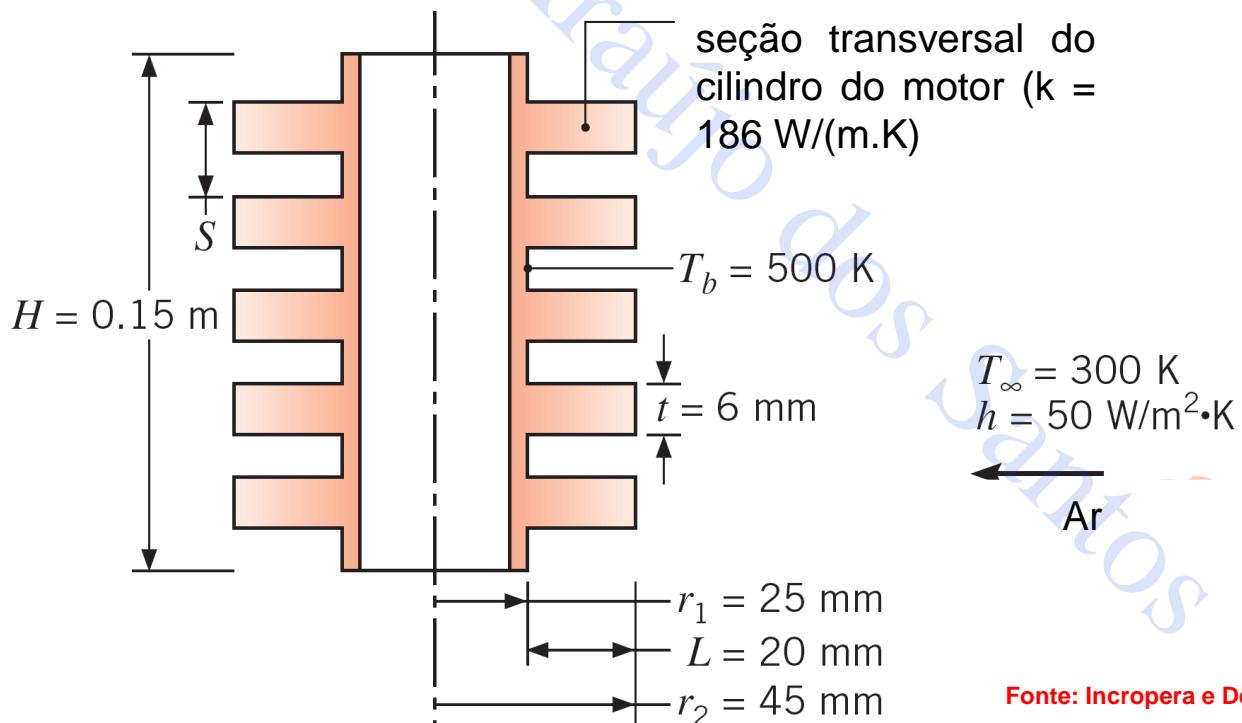
Logo, substituindo na equação da eficiência global da superfície, tem-se

$$\eta_G = 1 - \frac{NA_a}{A_T} (1 - \eta_a)$$

Relação entre a eficiência global de um sistema aletado e a eficiência individual de uma aleta.

# 5 . Superfícies Aletadas

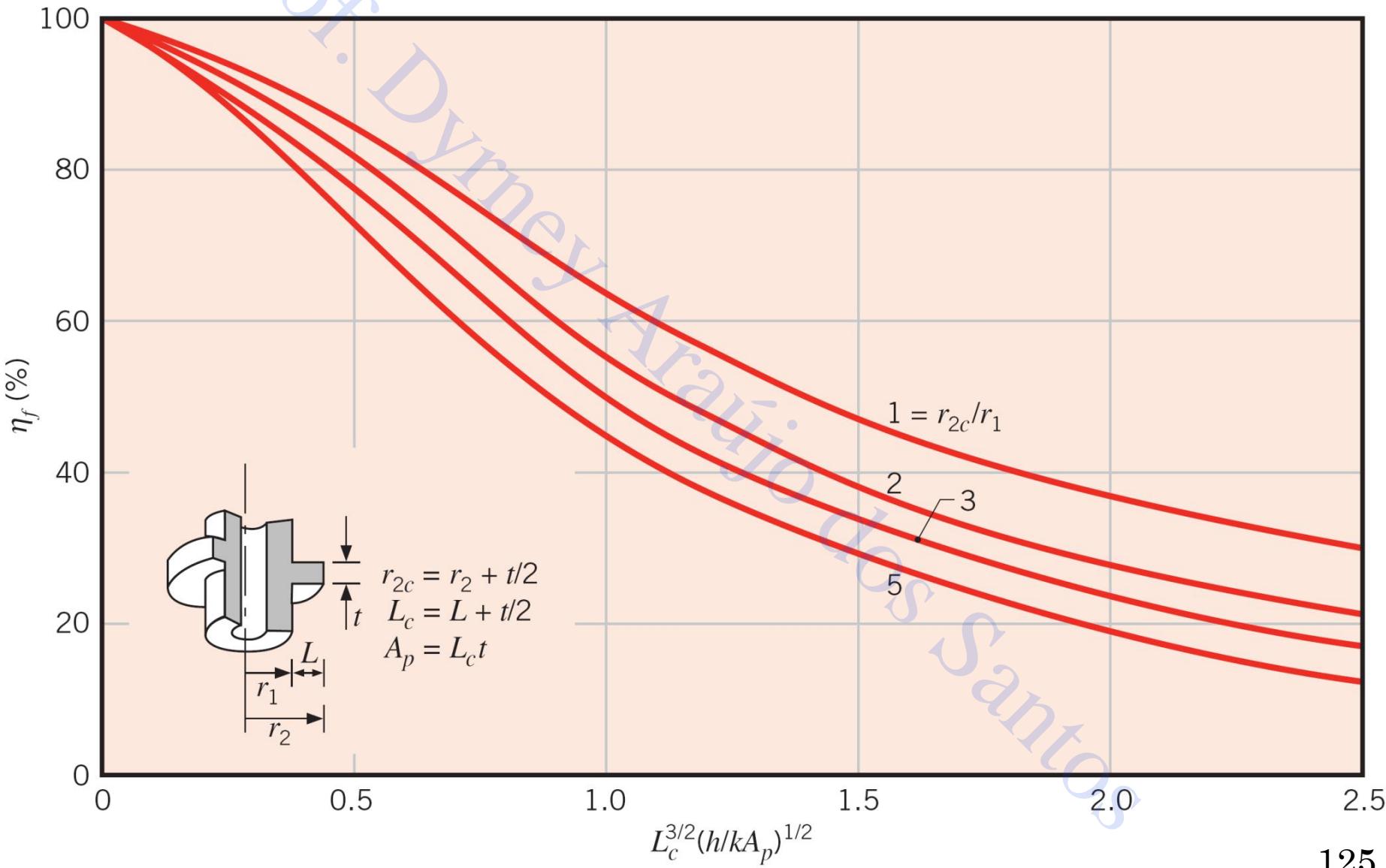
**Exercício Proposto 10:** O cilindro do pistão do motor de uma motocicleta é construído em liga de alumínio [ $k = 186 \text{ W}/(\text{m.K})$ ], tendo uma altura  $H = 0,15 \text{ m}$  e um diâmetro externo  $D = 50 \text{ mm}$ . Sob condições típicas de operação, a superfície externa do cilindro está a uma temperatura de  $500\text{K}$  e encontra-se exposta ao ar ambiente a  $300 \text{ K}$ , com um coeficiente convectivo de  $50 \text{ W}/(\text{m}^2\cdot\text{K})$ . Aletas anulares são fundidas integralmente com o cilindro para aumentar a transferência de calor para a vizinhança. Considere cinco destas aletas, com espessura  $t = 6 \text{ mm}$ , comprimento  $L = 20 \text{ mm}$  e igualmente espaçadas. Qual é o aumento da taxa de transferência de calor devido ao uso das aletas?



Fonte: Incropera e Dewitt (2008)

# 5 . Superfícies Aletadas

Gráfico para auxiliar no Exercício Proposto 10:



# Bibliografia

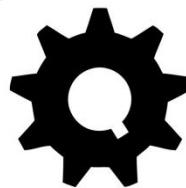
**INCROPERA, F.P. e DEWITT, D.P.** *Fundamentos de transferência de calor e massa*, 6<sup>a</sup> ed., LTC, 2008.

**ÇENGEL, Y.A e GHAJAR, A.J.**; *Transferência de calor e massa*, McGraw Hill, 4<sup>a</sup> edição, 2012.

**WELTY, J. R.; RORRER, G. L.; FOSTER, D.G.** *Fundamentos de Transferência de Momento, de Calor e de Massa*; tradução e revisão técnica Verônica Calado, 6. ed., Rio de Janeiro: LTC, 2017.



Instituto de Química  
IQ - UFG



**ENGENHARIA QUÍMICA**  
Universidade Federal de Goiás

# Condução Bidimensional em Regime Estacionário

Professor Dyrney Araújo dos Santos  
**Universidade Federal de Goiás**  
**Curso: Graduação em Engenharia Química**  
**Disciplina: Fenômenos de Transporte 2**  
site: [www.dyrney.com](http://www.dyrney.com)

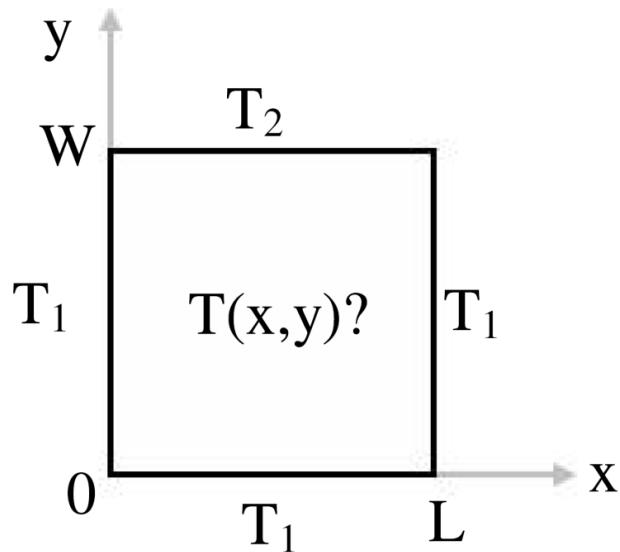
# 6 . Condução Bidimensional

## 6.1 Solução Analítica

A **Equação da Difusão Térmica** em coordenadas cartesianas é escrita como:

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{Q}$$

Considere o caso simplificado abaixo de **condução bidimensional, regime estacionário, condutividade térmica constante e sem geração interna de calor**, em uma placa contendo as seguintes condições de contorno:



Após as devidas simplificações, a equação da energia, para este caso, torna-se

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (\text{Eq.1})$$

Sendo as condições de contorno representadas por:

$$T(0, y) = T_1 \quad T(x, 0) = T_1$$

$$T(L, y) = T_1 \quad T(x, W) = T_2$$

**OBS.:** A equação anterior é conhecida como Equação de Laplace e é diferencial parcial necessitando de **4** condições de contorno para ser resolvida (**2** na direção **x** e **2** na direção **y**).

# 6 . Condução Bidimensional

## 6.1 Solução Analítica

**OBS.:** Para simplificar as condições de contorno, a temperatura pode ser expressa em termos da variação adimensional de temperatura “ $\theta$ ”, dada por

$$\theta = \frac{T - T_1}{T_2 - T_1} \quad \text{para } (T_2 > T_1)$$

Derivando-se esta relação duas vezes com relação a  $x$  e duas vezes com relação a  $y$ , respectivamente, tem-se:

$$\begin{cases} \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{1}{(T_2 - T_1)} \frac{\partial T}{\partial x}, & 1^{\text{a}} \text{ derivada em } x \\ \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{1}{(T_2 - T_1)} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, & 2^{\text{a}} \text{ derivada em } x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{(T_2 - T_1)} \frac{\partial T}{\partial y}, & 1^{\text{a}} \text{ derivada em } y \\ \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = \frac{1}{(T_2 - T_1)} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}, & 2^{\text{a}} \text{ derivada em } y \end{cases}$$

Após substituir na Eq.1 (original), tem-se:

$$(Eq.2) \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = 0 \quad \text{sujeito ás condições de contorno:}$$

$$\begin{cases} \theta(0, y) = 0 & \text{e} & \theta(x, 0) = 0 \\ \theta(L, y) = 0 & \text{e} & \theta(x, W) = 1 \end{cases}$$

**OBS.:** Note que após a transformação de variável, três das quatro condições de contorno são agora homogêneas e o valor de  $\theta$  ficou restrito ao intervalo de 0 a 1.

# 6 . Condução Bidimensional

## 6.1 Solução Analítica

Para resolver esta “EDP”, pode ser aplicado o “Método de Separação de Variáveis”, em que:

**OBS.:** Considera-se que haja uma solução produto para a equação diferencial sendo este produto composto por uma função apenas da posição “x”,  $X(x)$  e por uma função apenas da posição “y”,  $Y(y)$ , da forma

$$(Eq.3) \quad \theta(x, y) = X(x) \cdot Y(y)$$

**Comentário:** Se esta função for solução da equação diferencial, ela deve satisfazê-la após a substituição.

derivando a solução duas vezes com relação à  $x$  e duas com relação à  $y$ , tem-se, respectivamente:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = Y \frac{d^2 X}{dx^2} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = X \frac{d^2 Y}{dy^2}$$

Substituindo as derivadas na Eq. 2, tem-se:

$$Y \frac{d^2 X}{dx^2} + X \frac{d^2 Y}{dy^2} = 0 \quad \begin{matrix} \text{dividindo por "XY", e} \\ \text{reorganizando, tem-se:} \end{matrix} \quad -\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} \quad (Eq.4)$$

**OBS.:** lado esquerdo da equação Eq. 4 depende apenas de “x” e o lado direito apenas de “y”. Logo, ambos só podem ser iguais a uma constante. Para este estudo, já foi verificado que esta constante deverá ser positiva ( $\lambda^2$ ), pois caso contrário (negativa ou nula), obter-se-á uma solução não física ou trivial.

# 6 . Condução Bidimensional

## 6.1 Solução Analítica

Assim, são originadas as seguintes EDOs:

$$-\frac{1}{X} \frac{d^2X}{dx^2} = \lambda^2 \longrightarrow \frac{d^2X}{dx^2} + \lambda^2 X = 0 \quad (\text{Eq.5})$$

$$\frac{1}{Y} \frac{d^2Y}{dy^2} = \lambda^2 \longrightarrow \frac{d^2Y}{dy^2} - \lambda^2 Y = 0 \quad (\text{Eq.6})$$

Cujas solução gerais são dadas por, respectivamente:

$$X = C_1 \cos(\lambda x) + C_2 \sin(\lambda x) \quad \text{e} \quad Y = C_3 e^{-\lambda y} + C_4 e^{\lambda y} \quad (\text{Eqs.7 e 8})$$

Substituindo as soluções gerais (Eqs. 7 e 8) na solução produto proposta anteriormente (Eq. 3), tem-se:

$$\theta = [C_1 \cos(\lambda x) + C_2 \sin(\lambda x)] \cdot [C_3 e^{-\lambda y} + C_4 e^{\lambda y}]$$

**OBS.:** Para se determinar as constantes **C1**, **C2**, **C3**, **C4** e **λ** utilizam-se as condições de contorno.

# 6 . Condução Bidimensional

## 6.1 Solução Analítica

- Para a condição de contorno:  $\theta(0, y) = 0$

$$0 = [C_1 \cos(\lambda \cdot 0) + C_2 \sin(\lambda \cdot 0)] \cdot [C_3 e^{-\lambda y} + C_4 e^{\lambda y}] \longrightarrow C_1 = 0$$

- Para a condição de contorno:  $\theta(x, 0) = 0$

$$0 = C_2 \sin(\lambda x) \cdot [C_3 e^{-\lambda \cdot 0} + C_4 e^{\lambda \cdot 0}] \longrightarrow C_2 \sin(\lambda x) \cdot [C_3 + C_4] = 0$$

Analizando a condição de contorno anterior, têm-se duas possibilidades:

$$\begin{cases} C_2 = 0 & \text{Não aplicável pois a dependência de } \theta \text{ com } x \text{ desaparece} \\ C_3 + C_4 = 0 & \rightarrow C_3 = -C_4 \text{ satisfaz o problema} \end{cases}$$

Após a substituição das condições até agora analisadas, tem-se:

$$\theta = C_2 C_4 \sin(\lambda x) \cdot [e^{\lambda y} - e^{-\lambda y}]$$

# 6 . Condução Bidimensional

## 6.1 Solução Analítica

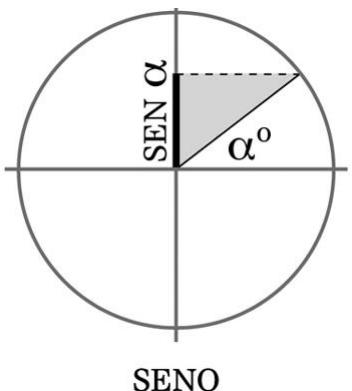
- Para a condição de contorno:  $\theta(L, y) = 0$

$$0 = C_2 C_4 \sin(\lambda L) \cdot [e^{\lambda y} - e^{-\lambda y}] \xrightarrow{\text{duas possibilidades}}$$

C<sub>2</sub>C<sub>4</sub> = 0
Não aplicável (elimina a dependência com x e y)

sen(\lambda L) = 0
satisfaz o problema

Desta forma, a responsabilidade recairá sobre a função senoidal (deverá ser nula)



Para que a função senoidal seja nula, é necessário que  $\lambda L = n\pi$  ou  $\lambda = \frac{n\pi}{L}$  com  $(n = 1, 2, 3, 4, 5, \dots)$

OBS.: O valor  $n = 0$  foi descartado, pois ele implicaria que  $\theta(x, y) = 0$ .

Fazendo as devidas substituições, tem-se:

$$\theta = C_2 C_4 \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cdot \left[ e^{\frac{n\pi y}{L}} - e^{-\frac{n\pi y}{L}} \right]$$

# 6 . Condução Bidimensional

## 6.1 Solução Analítica

Combinando as constantes  $C_2$  e  $C_4$  e reconhecendo que a nova constante pode depender de  $n$ , obtemos

$$\theta = C_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sinh\left(\frac{n\pi y}{L}\right) \quad \text{lembrando que } \sinh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

**OBS.:** A solução particular desta equação é composta por infinitas soluções (a depender de  $n$ ).

Visto que o problema é linear, a solução geral é dada pela soma das soluções particulares através do Princípio da Superposição. Logo:

$$\theta = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ C_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sinh\left(\frac{n\pi y}{L}\right) \right\}$$

- Por fim, para se determinar  $C_n$  aplica-se a condição de contorno:  $\theta(x, W) = 1$

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ C_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sinh\left(\frac{n\pi W}{L}\right) \right\} \quad (\text{Eq.9})$$

**OBS.:** A determinação de  $C_n$  se mostra um pouco complicada, porém há um método padrão disponível. O método envolve escrever uma expansão em série infinita em termos de **funções ortogonais**.

# 6 . Condução Bidimensional

## 6.1 Solução Analítica

**\*Relembrando:** Um conjunto infinito de funções  $g_1(x)$ ,  $g_2(x)$ ,  $g_3(x)$  ...  $g_n(x)$ , é considerado ortogonal num intervalo  $a < x < b$ , se:

$$\int_a^b g_m(x) g_n(x) dx = 0 \text{ com } (m \neq n)$$

Funções trigonométricas exibem ortogonalidade.

**Estratégia Matemático:** A utilidade deste conceito no presente problema reside no fato de que qualquer função matemática “ $f(x)$ ” pode ser representada por uma série infinita de funções ortogonais “ $g_n(x)$ ” como segue

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n g_n(x) \quad (\text{Eq. 10})$$

Multiplicando os dois membros por “ $g_n(x)$ ” e integrando no intervalo  $[a,b]$

$$\int_a^b f(x) g_n(x) dx = \int_a^b g_n(x) \sum_{n=1}^{\infty} A_n g_n(x) dx$$

# 6 . Condução Bidimensional

## 6.1 Solução Analítica

Abrindo a expressão do somatório do lado direito, tem-se:

$$\int_a^b f(x)g_n(x) dx = \int_a^b g_n(x)[A_1g_1(x) + A_2g_2(x) + A_3g_3(x) + \dots + A_ng_n(x) + \dots] dx$$

$$= A_1 \int_a^b g_n(x)g_1(x) dx + A_2 \int_a^b g_n(x)g_2(x) dx + A_3 \int_a^b g_n(x)g_3(x) dx + \dots + A_n \int_a^b g_n(x)g_n(x) dx + \dots$$

Zerando os termos de integrais contendo funções diferentes,

$$\int_a^b f(x)g_n(x) dx = A_1 \cdot 0 + A_2 \cdot 0 + A_3 \cdot 0 + \dots + A_n \int_a^b g_n^2(x) dx + 0$$

Logo,

$$\int_a^b f(x)g_n(x) dx = A_n \int_a^b g_n^2(x) dx$$

# 6 . Condução Bidimensional

## 6.1 Solução Analítica

Explicitando  $A_n$ , na equação anterior resulta em:

$$A_n = \frac{\int_a^b f(x)g_n(x) dx}{\int_a^b g_n^2(x) dx} \quad (\text{Eq. 11})$$

**OBS.:** Retornando ao problema bidimensional e comparando as **Eq. 9** e **Eq. 10**

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ C_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sinh\left(\frac{n\pi W}{L}\right) \right\} \quad \text{e} \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n g_n(x)$$

da comparação  
têm-se:

$$\begin{cases} f(x) = 1 \\ g_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \end{cases}$$

Substituindo  $f(x)$  e  $g(x)$  na Equação de  $A_n$  (**Eq. 11**), determinada anteriormente, tem-se:

$$A_n = \frac{\int_0^L 1 \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx}{\int_0^L \sin^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx} \quad \longrightarrow \quad A_n = \frac{2 \frac{(-1)^{n+1} + 1}{n}}{\pi}$$

# 6 . Condução Bidimensional

## 6.1 Solução Analítica

Desta forma, após encontrar  $A_n$  pode-se voltar à (Eq.10) para escrevê-la de uma forma análoga à equação envolvendo a condição inicial do problema (Eq.9) :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n g_n(x) \longrightarrow 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \left( \frac{2(-1)^{n+1} + 1}{\pi n} \right) \sin \left( \frac{n\pi x}{L} \right) \right] \quad (\text{Eq.12})$$

Comparando a Eq. 12 com a equação envolvendo a condição inicial do problema (Eq.9):

$$\begin{aligned} (\text{Eq.12}) \quad 1 &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \left( \frac{2(-1)^{n+1} + 1}{\pi n} \right) \sin \left( \frac{n\pi x}{L} \right) \right] \\ (\text{Eq.9}) \quad 1 &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ C_n \operatorname{senh} \left( \frac{n\pi W}{L} \right) \sin \left( \frac{n\pi x}{L} \right) \right\} \end{aligned}$$

$$C_n = \frac{\left( \frac{2(-1)^{n+1} + 1}{\pi n} \right)}{\operatorname{senh} \left( \frac{n\pi W}{L} \right)}$$

Finalmente, após encontrar todas as constantes de integração, tem-se a solução para o problema bidimensional de difusão

$$\theta = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{(-1)^{n+1} + 1}{n} \sin \left( \frac{n\pi x}{L} \right) \frac{\operatorname{senh} \left( \frac{n\pi y}{L} \right)}{\operatorname{senh} \left( \frac{n\pi W}{L} \right)} \right\}$$

**OBS.:** Dependendo das condições de contorno, a solução analítica torna-se complexa ou inexistente. Nesses casos utilizam-se métodos numéricos.

# 6 . Condução Bidimensional

## 6.2 O Fator de Forma para predição da Taxa de Calor

**Estratégia:** Problemas de condução bi e tridimensionais podem ser resolvidos usando-se soluções existentes da equação de calor em termos de um fator de forma “S”

Logo, neste caso, a taxa de calor pode ser representada por:

$$Q = Sk \Delta T_{1-2}$$

sendo  $\Delta T_{1-2}$  a diferença de temperaturas entre os contornos

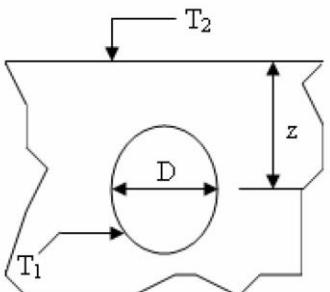
A resistência condutiva bidimensional pode ser escrita na forma:

$$R_{t,cond(2d)} = \frac{1}{Sk}$$

**OBS.:** Há na literatura, expressões para o cálculo do fator de forma “S” dependendo do tipo das superfícies envolvidas. Alguns exemplos são apresentados a seguir

### Fatores de Forma da Condução para Sistemas Selecionados

A) Esfera Isotérmica enterrada em um meio semi-infinito:



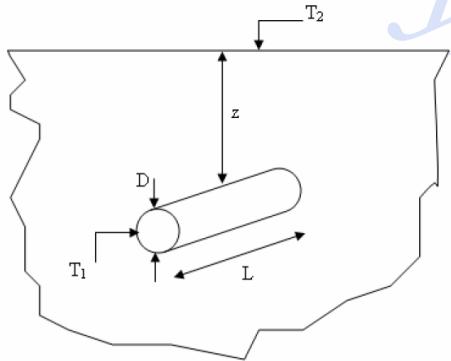
$$S = \frac{2\pi D}{1 - \frac{D}{4z}}$$

Restrição:  $z > D/2$

# 6 . Condução Bidimensional

## 6.2 O Fator de Forma para predição da Taxa de Calor

B) Cilindro horizontal de comprimento L, isotérmico, enterrado em um meio semi-infinito:



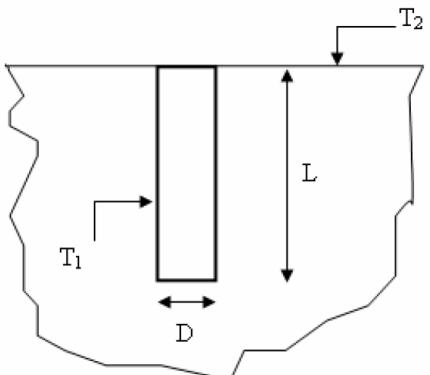
$$\text{Se } L \gg D \rightarrow$$

$$S = \frac{2\pi L}{a \cosh\left(\frac{2z}{D}\right)}$$

$$\text{Se } L \gg D \text{ e } z > 3D/2 \rightarrow$$

$$S = \frac{2\pi L}{\ln\left(\frac{4z}{D}\right)}$$

C) Cilindro Vertical em meio semi-infinito:



$$L \gg D$$

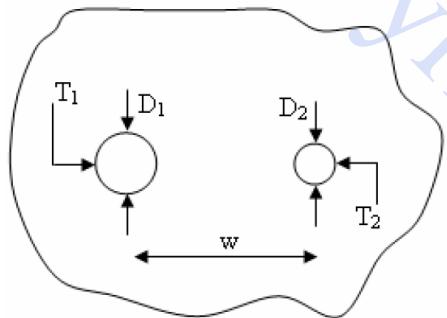
$$\rightarrow$$

$$S = \frac{2\pi L}{\ln\left(\frac{4L}{D}\right)}$$

# 6 . Condução Bidimensional

## 6.2 O Fator de Forma para predição da Taxa de Calor

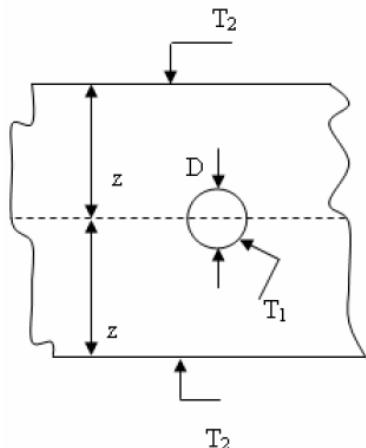
D) Condução entre dois cilindros de comprimento L em um meio infinito:



Se  $L \gg D_1, D_2$  e  $L \gg w$

$$S = \frac{2\pi L}{a \cosh\left(\frac{4w^2 - D_1^2 - D_2^2}{2D_1^2}\right)}$$

E) Cilindro circular horizontal de comprimento L centralizado entre planos paralelos de comprimentos iguais e largura infinita:



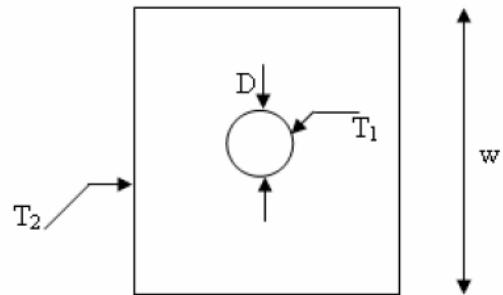
Se  $z \gg D/2$  e  $L \gg z$

$$S = \frac{2\pi L}{\ln\left(\frac{8z}{\pi D}\right)}$$

# 6 . Condução Bidimensional

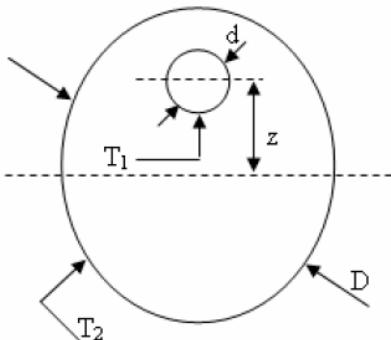
## 6.2 O Fator de Forma para predição da Taxa de Calor

F) Cilindro Circular de Comprimento L centralizado numa cuba de mesmo comprimento e área da seção reta quadrada.



$$\text{Se } w > D \text{ e } L \gg w \quad \rightarrow \quad S = \frac{2\pi L}{\ln(1,08w/D)}$$

G) Cilindro circular excêntrico de comprimento L em um cilindro de mesmo comprimento:

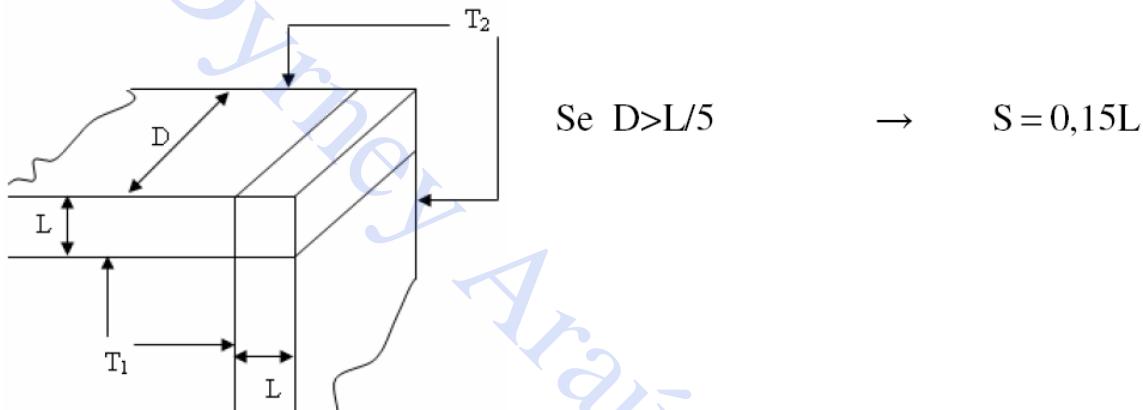


$$\text{Se } D > d \text{ e } L \gg D \quad \rightarrow \quad S = \frac{2\pi L}{a \cosh\left(\frac{D^2 + d^2 - 4z^2}{2Dd}\right)}$$

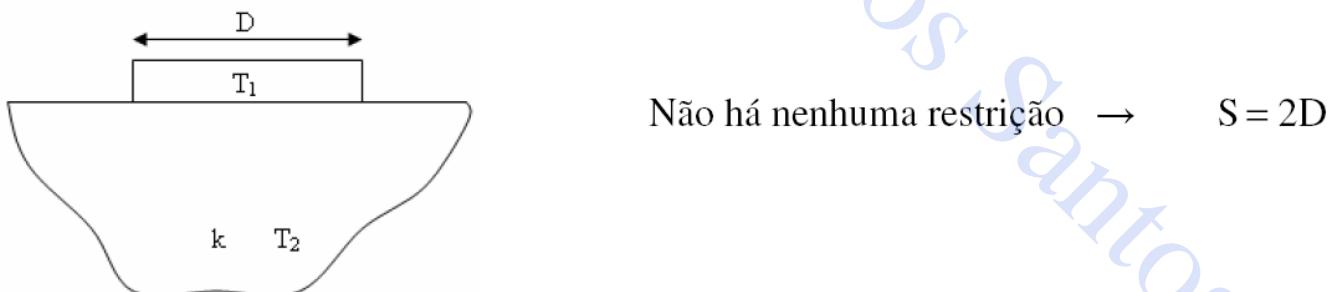
# 6 . Condução Bidimensional

## 6.2 O Fator de Forma para predição da Taxa de Calor

### H) Condução através das extremidades de paredes



### I) Discos de Diâmetros D sobre um meio semi-infinito de condutividade k



## 6 . Condução Bidimensional

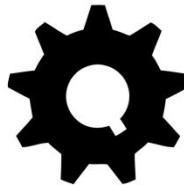
**Exercício Proposto 11:** Rejeitos radioativos são temporariamente armazenados em um recipiente esférico, cujo centro encontra-se enterrado a uma distância de **10 m** abaixo da superfície da terra [ $k_{\text{sol}} = 0,52 \text{ W}/(\text{m.K})$ ]. O diâmetro externo do recipiente é igual a **2 m** e **500 W** de calor são liberados como resultado do processo de decaimento radioativo. Se a temperatura da superfície do solo é de **20°C**, qual é a temperatura da superfície externa do recipiente em condições de regime estacionário?

# Bibliografia

**INCROPERA, F.P. e DEWITT, D.P.** *Fundamentos de transferência de calor e massa*, 6<sup>a</sup> ed., LTC, 2008.

**ÇENGEL, Y.A e GHAJAR, A.J.**; *Transferência de calor e massa*, McGraw Hill, 4<sup>a</sup> edição, 2012.

**WELTY, J. R.; RORRER, G. L.; FOSTER, D.G.** *Fundamentos de Transferência de Momento, de Calor e de Massa*; tradução e revisão técnica Verônica Calado, 6. ed., Rio de Janeiro: LTC, 2017.



# Condução Transiente de Calor

Professor Dyrney Araújo dos Santos  
**Universidade Federal de Goiás**  
**Curso: Graduação em Engenharia Química**  
**Disciplina: Fenômenos de Transporte 2**  
site: [www.dyrney.com](http://www.dyrney.com)

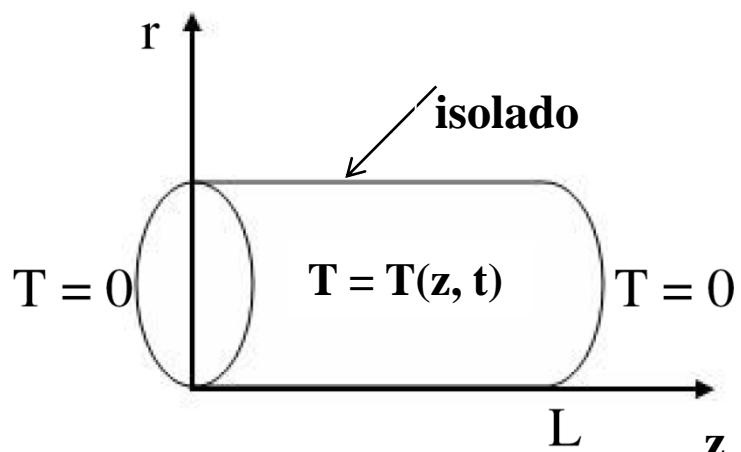
# 7 . Condução Transiente

## 7.1 Solução Analítica

A **Equação da Difusão Térmica** em coordenadas cilíndricas é escrita como:

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( kr \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( k \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{Q}$$

Considere o caso simplificado abaixo de condução transiente num cilindro isolado cujas faces são mantidas a temperaturas constantes ( $T=0$ ) ( **condução unidimensional**). No instante de tempo  $t=0$ , a distribuição de temperaturas era  $T(z,0) = f(z)$ . Neste caso a temperatura varia axialmente,  $T(z,t)$ .



Após as devidas simplificações, a equação da energia, para este caso, torna-se:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{\rho c_p} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

Sendo as condições de contorno e inicial dadas por:

$T(z, t=0) = f(z)$ , condição inicial

$T(z=0, t)=0$ , condição de contorno

$T(z=L, t)=0$ , condição de contorno

# 7 . Condução Transiente

## 7.1 Solução Analítica

**OBS.:** Este problema pode ser resolvido, de forma semelhante ao problema de condução bidimensional, através da aplicação do **Método da Separação de Variáveis**, cujo procedimento já foi demonstrado anteriormente.

Somente para nível de exemplificação, a solução, através do método de separação de variáveis do problema proposto, é dada por:

$$T(z,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ A_n e^{-k \left( \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \right) t} \sin \left[ \left( \frac{n\pi}{L} \right) z \right] \right\}$$

sendo:

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(z) \sin \left( \frac{n\pi}{L} z \right) dz$$

**OBS.:** A seguir serão introduzidos alguns métodos alternativos à solução do problema de condução transiente de calor, os quais são normalmente aplicados em problemas de engenharia.

# 7 . Condução Transiente

## 7.2 Método da Capacitância Global

### Observações a serem consideradas:

- O Método da Capacitância Global é utilizado em situações típicas em engenharia nas quais um sólido experimenta mudanças bruscas em sua temperatura. Ex: sólido retirado de um forno e imerso subitamente num tanque de água
- Caso a condutividade do sólido seja alta, a temperatura do sólido será espacialmente uniforme durante o processo de resfriamento ou aquecimento, ou seja, ausência de gradientes de temperatura,  $T(t)$
- Se baseia em uma aproximação visto que pela lei de Fourier, a ausência de gradiente de temperatura implica condutividade térmica infinita
- Tal método só pode ser utilizado quando a razão entre as resistências condutiva e convectiva do sistema for pequena.

# 7 . Condução Transiente

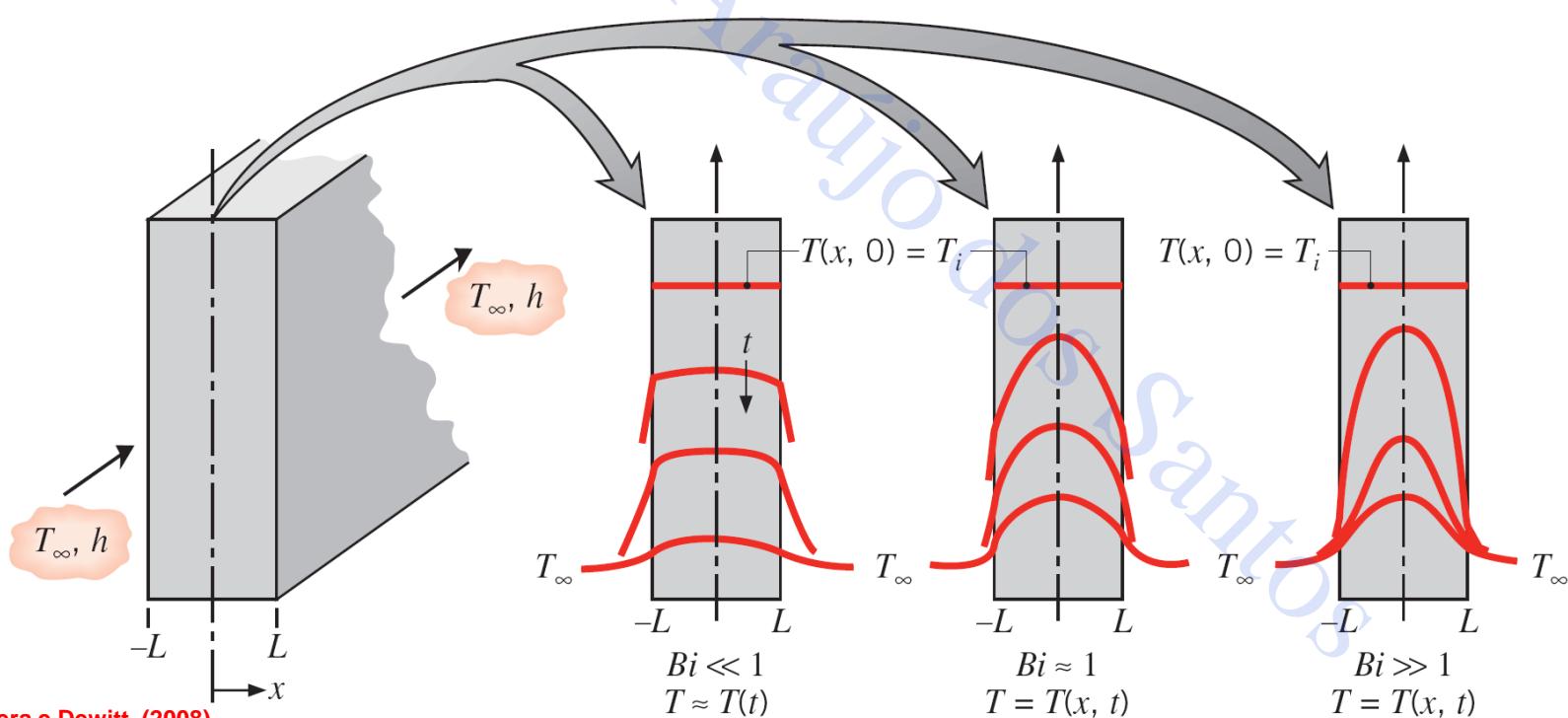
## 7.2 Método da Capacitância Global

**Número de Biot:** O número de Biot (**Bi**) é definido como sendo a razão entre as resistências condutiva e convectiva

$$\frac{R_{t,cond}}{R_{t,conv}} = \frac{L/kA}{1/hA} = \frac{hL}{k} = Bi$$

Critério para utilização do método da capacidade

$$Bi < 0,1$$



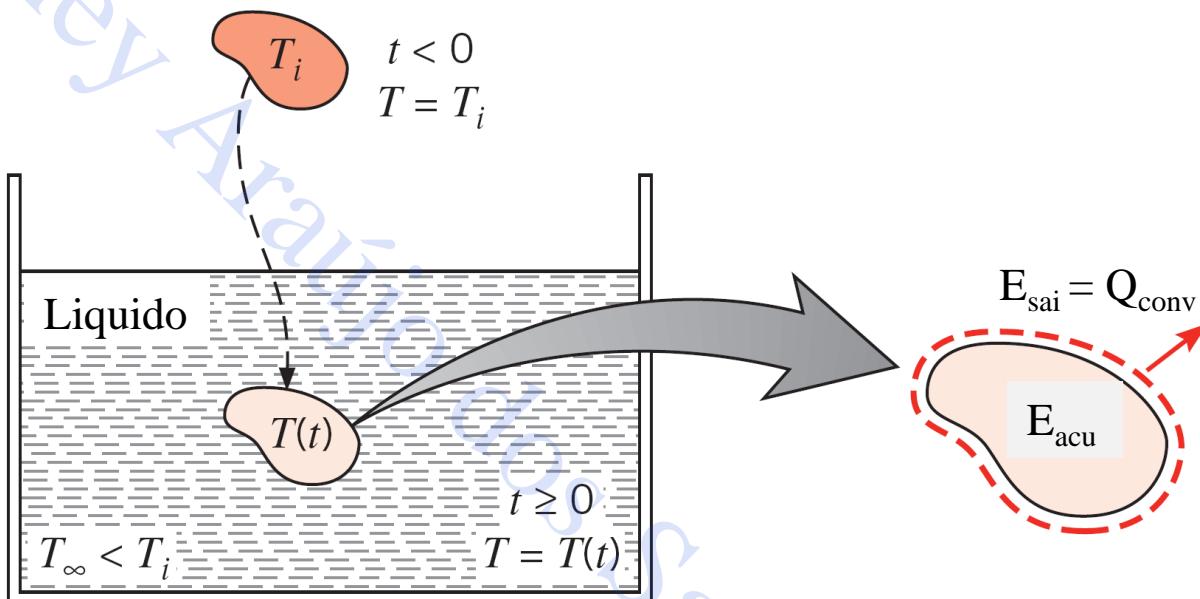
# 7 . Condução Transiente

## 7.2 Método da Capacitância Global

**Aplicação:** Considere a forja de um metal quente que está inicialmente a uma temperatura uniforme  $T_i$  e que é temperado pela sua imersão em um líquido a uma temperatura mais baixa  $T_\infty < T_i$ .  $T_i$  diminui ao longo do tempo até atingir  $T_\infty$ .

### Hipóteses:

- $T_i$  diminui devido à transferência de calor por convecção na interface sólido-líquido;
- Temperatura no sólido é uniforme no espaço, em qualquer instante durante o processo,  $T(t)$ ;
- logo, gradientes de temperatura no sólido são desprezível.



# 7 . Condução Transiente

## 7.2 Método da Capacitância Global

**OBS.:** A Equação do Calor não se aplica neste caso visto que os gradientes de temperatura são desprezados. Alternativamente, a resposta transiente da temperatura é determinada pela formulação de um Balanço de Energia Global no sólido.

Considerando o sólido como o volume de controle, esse balanço deve relacionar a taxa de perda de calor por convecção com a taxa de acumulo, logo:

$$-E_{sai} = E_{ac}$$

ou,

$$-hA_s(T - T_\infty) = \rho V c_p \frac{dT}{dt}$$

Separando as variáveis e integrando a partir da condição inicial ( $t = 0$ ) onde  $T(0) = T_i$ , obtemos

$$\frac{\rho V c_p}{hA_s} \int_{T_i}^T \frac{dT}{(T - T_\infty)} = - \int_0^t dt$$

# 7 . Condução Transiente

## 7.2 Método da Capacitância Global

Efetuando as integrações, segue-se que

$$\frac{\rho V c_p}{h A_s} \ln \frac{(T_i - T_\infty)}{(T - T_\infty)} = t$$

ou, de outra forma

$$\frac{(T - T_\infty)}{(T_i - T_\infty)} = \exp \left[ -\left( \frac{h A_s}{\rho V c_p} \right) t \right]$$

**(T-T<sub>∞</sub>) → 0 (exponencialmente)**  
**á medida que t → ∞**

**OBS.:**

A presente equação pode ser usada para determinar o tempo necessário para o sólido alcançar uma dada temperatura **T**, ou, por outro lado, pode ser utilizada no cálculo da temperatura alcançada no sólido em algum tempo **t**.

# 7 . Condução Transiente

## 7.2 Método da Capacitância Global

Definindo um comprimento característico ( $L_c$ ) como sendo a razão entre o volume do sólido e a sua área superficial,  $L_c = V/A_s$ , o termo que está dentro da exponencial pode ser representado como:

$$\frac{hA_s t}{\rho V c_p} = \frac{ht}{\rho c_p L_c} = \frac{hL_c}{k} \frac{k}{\rho c_p} \frac{t}{L_c^2} = \frac{hL_c}{k} \frac{\alpha t}{L_c^2} \quad \text{sendo } \alpha = \frac{k}{\rho c_p}$$

**Difusividade térmica**

ou, de outra forma

$$\frac{hL_c}{k} \frac{\alpha t}{L_c^2} = Bi \cdot Fo \quad \text{sendo } Fo = \frac{\alpha t}{L_c^2}$$

**Número de Fourier**

Substituindo na equação do balanço de energia, tem-se:

$$\frac{(T - T_\infty)}{(T_i - T_\infty)} = \exp(-Bi \cdot Fo)$$

sendo

$$L_c = \begin{cases} r_0/2 & \text{para cilindro} \\ r_0/3 & \text{para esfera} \\ L/2 & \text{para parede plana} \end{cases}$$

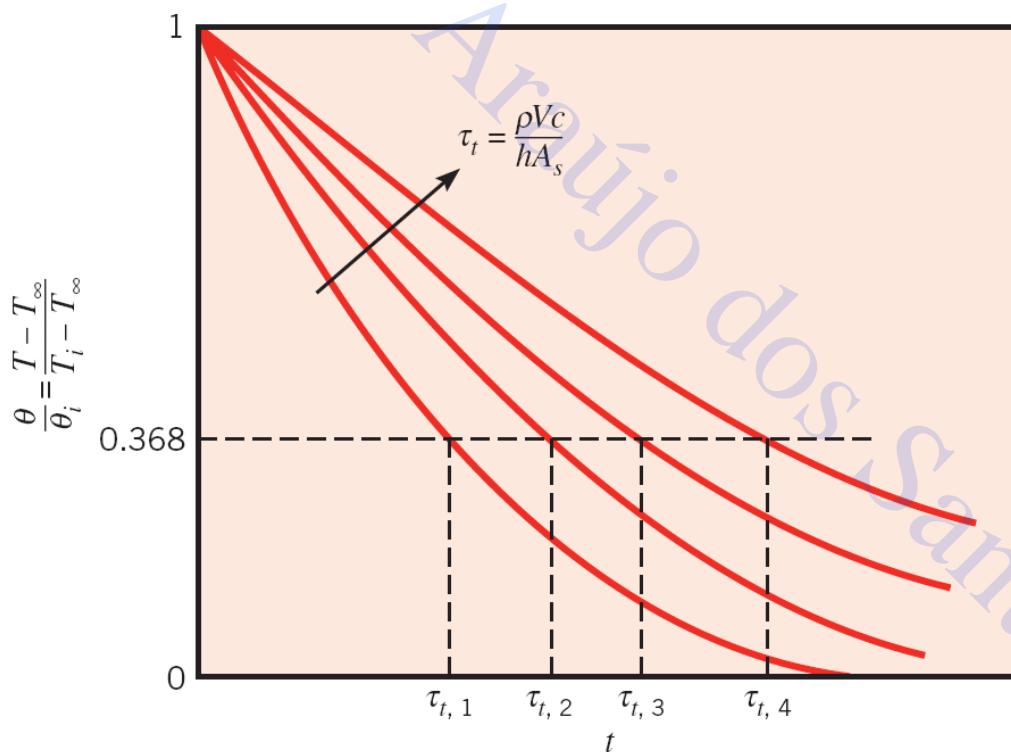
# 7 . Condução Transiente

## 7.2 Método da Capacitância Global

Pode-se definir, ainda, a partir da equação anterior, uma **constante de tempo térmica** como sendo:

$$\tau_t = \left( \frac{1}{hA_s} \right) (\rho V c_p)$$

Quanto menor o valor de  $\tau_t$ , mais rapidamente o sistema atinge o estado estacionário



# 7 . Condução Transiente

## 7.2 Método da Capacitância Global

Para determinar o total da energia transferida  $E_T$  até algum instante de tempo  $t$ , simplesmente escrevemos

$$E_T = \int_0^t Q_{conv} dt$$

ou seja

$$E_T = hA_s \int_0^t (T - T_\infty) dt$$

substituindo a expressão da temperatura em função do tempo, e integrando, tem-se:

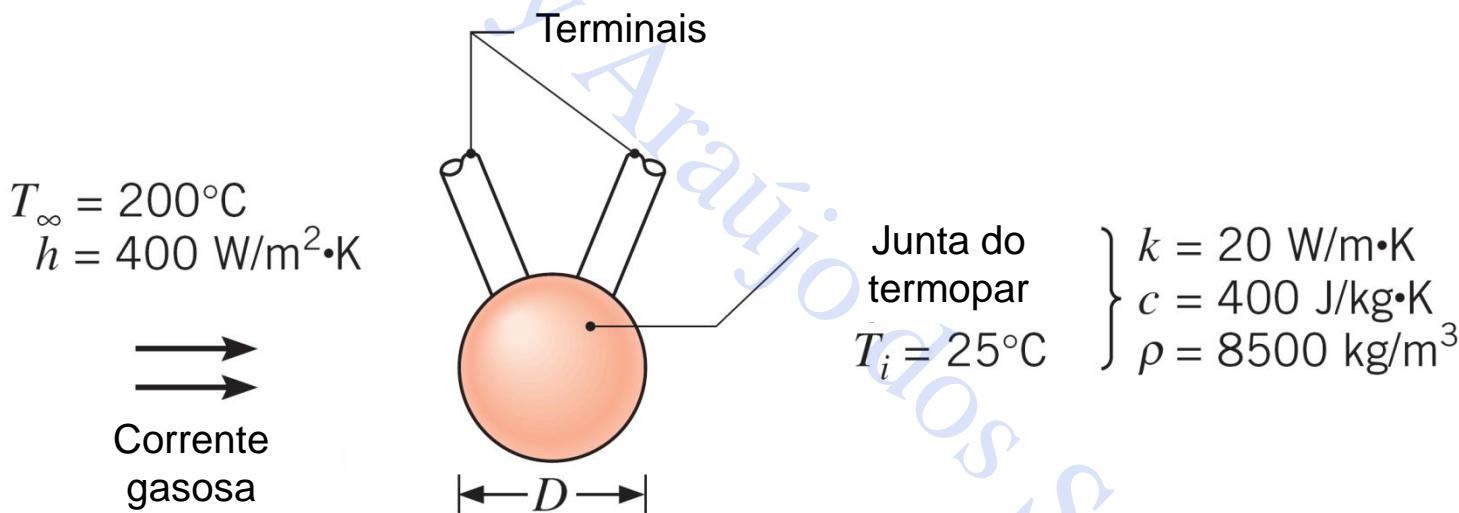
$$E_T = (\rho V c_p)(T_i - T_\infty) \left[ 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_t}\right) \right]$$

**OBS.:** A energia total liberada até o sistema atingir o estado estacionário é obtida fazendo  $t \rightarrow \infty$  na equação anterior. Logo:

$$E_{T \text{ estado estacionário}} = (\rho V c_p)(T_i - T_\infty)$$

# 7 . Condução Transiente

**Exercício Proposto 12:** Uma junta de termopar, que pode ser aproximada por uma esfera, é usada para medir a temperatura de uma corrente gasosa. O coeficiente convectivo entre a superfície da junta e o gás é igual a  $h = 400 \text{ W}/(\text{m}^2\cdot\text{K})$  e as propriedades termofísicas da junta são  $k = 20 \text{ W}/(\text{m}\cdot\text{K})$ ,  $c_p = 400 \text{ J}/(\text{kg}\cdot\text{K})$  e  $\rho = 8500 \text{ kg}/\text{m}^3$ . Determine o diâmetro que a junta deve ter para que o termopar tenha uma constante de tempo de 1 s. Se a junta está a  $25^\circ\text{C}$  e encontra-se posicionada em uma corrente de gás a  $200^\circ\text{C}$ , quanto tempo será necessário para a junta alcançar  $199^\circ\text{C}$ ?



# 7 . Condução Transiente

## 7.3 Diagramas de Temperatura x Tempo para Geometrias Simples

Consideração: Quando há o surgimento de gradientes de temperatura no interior do sólido, o método da Capacitância Global não pode ser utilizado. Neste caso, o Método Gráfico pode ser utilizado para processos de transferência condutiva de calor transiente com convecção na fronteira. Existem vários gráficos, porém, serão mostrados os Diagramas de Gurney-Lurie.

Hipóteses: não há advecção no interior do meio (**condução pura**); não há termo de geração ( $Q = 0$ ); a **(difusividade térmica)** é constante; temperatura inicial uniforme ( $T(x, t=0) = T_0$ ); embora sejam elaborados para transporte unidimensional, podem ser estendidos para transporte bi e tridimensional.

As seguintes variáveis são consideradas nos Diagramas de “Gurney-Lurie”:

(a)  $m = \frac{k}{hx_l}$  m: razão entre a resistência à transferência de calor por convecção e a resistência à transferência de calor por condução;  $x_l$ : dimensão característica do sistema. Se:  
 $m \approx 0 \rightarrow$  processo controlado pela condução (resistência convectiva nula) ou  $T_s = T_\infty$   
 $m \gg 0 \rightarrow$  processo controlado pela convecção ou  $T_s \neq T_\infty$

---

(b)  $Y = \frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty}$  ou  $Y = \frac{T - T_s}{T_0 - T_s}$  ( $m \approx 0$ ) Y: temperatura adimensionalizada;  $T_\infty$  a temperatura do fluido adjacente;  $T_s$  a temperatura na superfície;  $T_0$  a temperatura uniforme inicial ( $t = 0$ ).

---

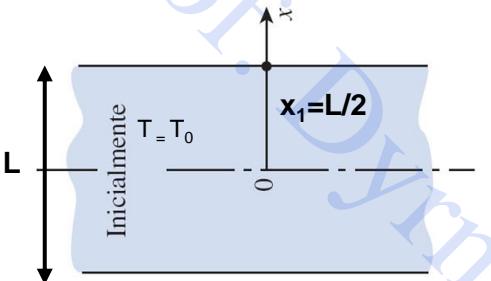
(c)  $X = \frac{\alpha t}{x_l^2}$  X: tempo adimensionalizado

---

(d)  $n = \frac{x}{x_l}$  n: posição adimensionalizada; x: qualquer posição no interior do sistema

# 7 . Condução Transiente

**PLACAS INFINITAS:** largura e altura muito maiores do que a espessura ( $L$ )



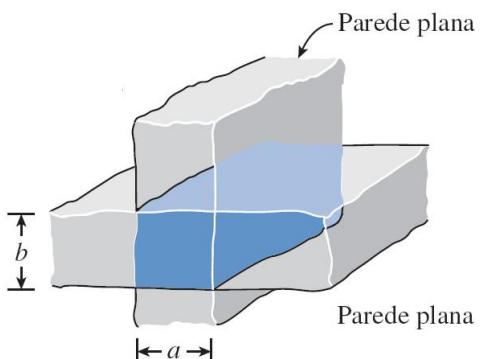
a) Transferência de calor pelas duas faces (inferior e superior)

$$\text{Neste caso, tem-se: } x_1 = \frac{L}{2} \quad \text{e} \quad X = \frac{4\alpha t}{L^2}$$

b) Transferência de calor por uma das faces (inferior ou superior)

$$\text{Neste caso, tem-se: } x_1 = L \quad \text{e} \quad X = \frac{\alpha t}{L^2}$$

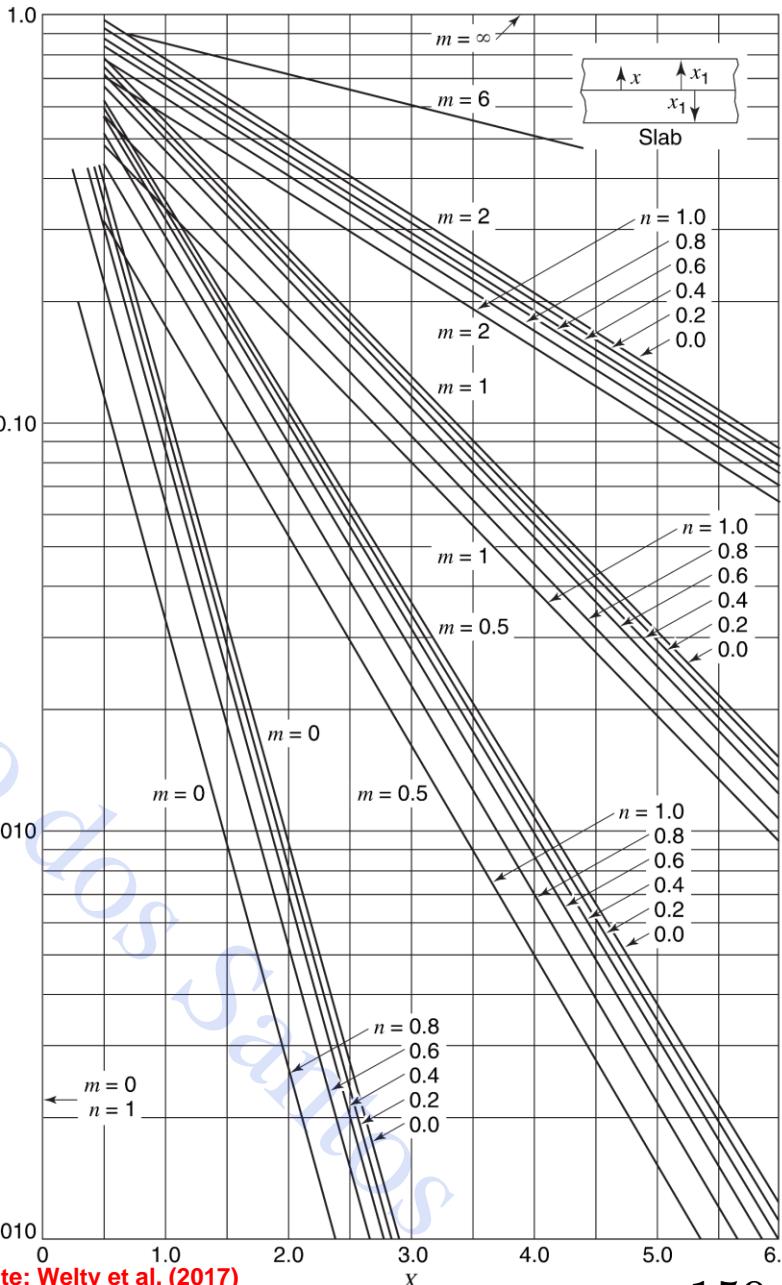
c) Transferência de calor bi ou tridimensional



Ex.: bidimensional  $Y = Y_a Y_b$

$$\text{Sendo: } Y_a = Y \left( x_1 = \frac{a}{2} \right)$$

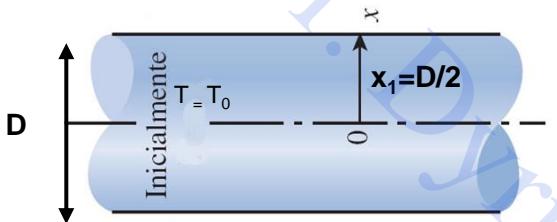
$$Y_b = Y \left( x_1 = \frac{b}{2} \right)$$



Fonte: Welty et al. (2017)

# 7 . Condução Transiente

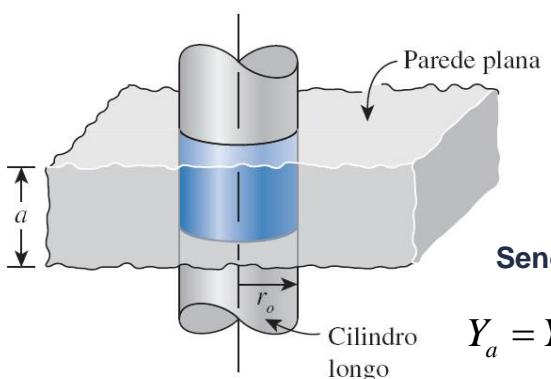
**CILINDRO INFINITO:** comprimento é muito maior do que o raio



Neste caso, tem-se:

$$x_1 = \frac{D}{2} \quad \text{e} \quad X = \frac{4\alpha t}{D^2}$$

**OBS.:** No caso em que um cilindro não é considerado longo, pode-se usar os diagramas fazendo a interseção do cilindro infinito com uma placa infinita, como mostrado abaixo:



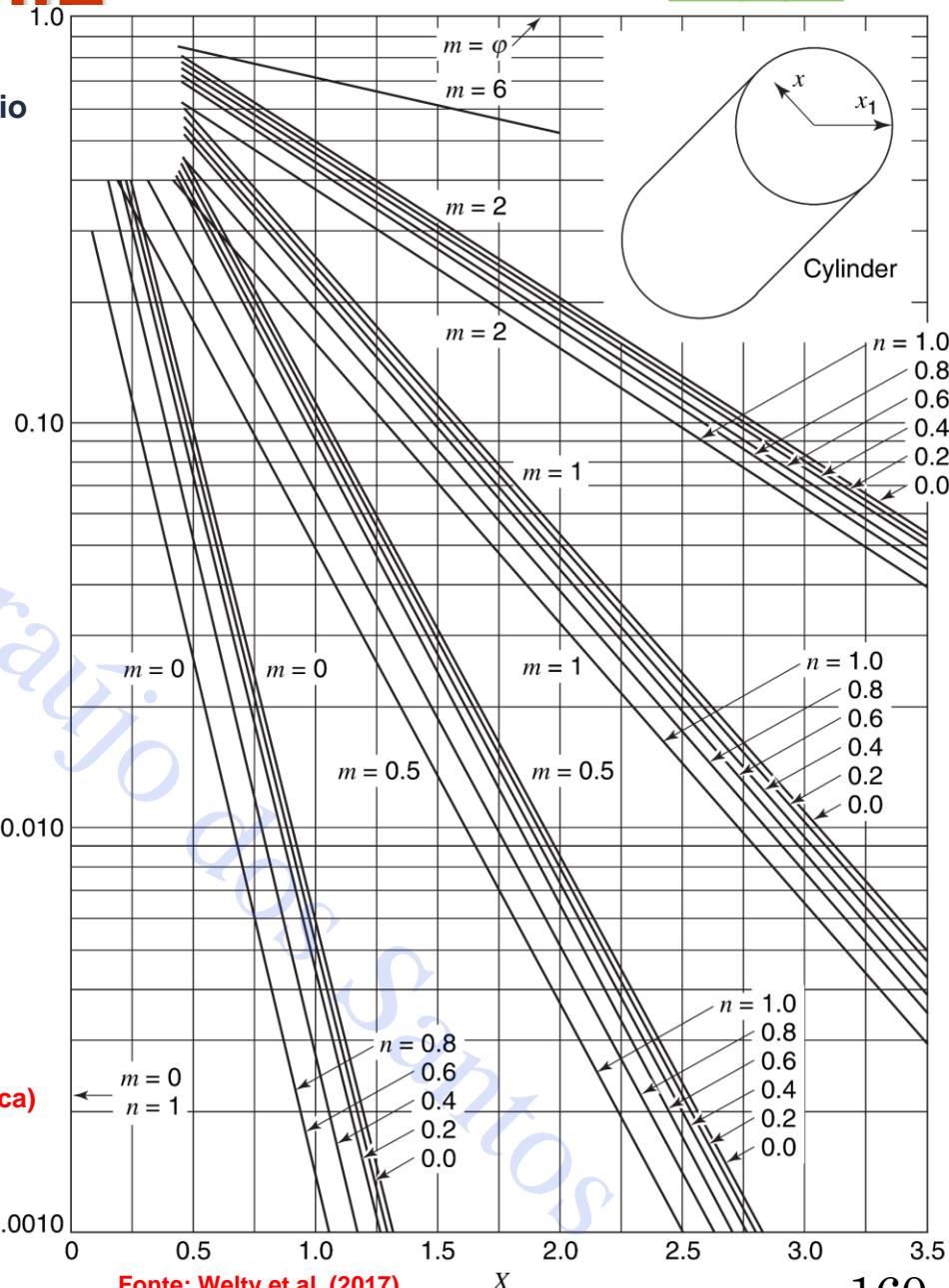
Neste caso, tem-se:

$$Y = Y_r Y_a$$

Sendo:

$$Y_a = Y\left(x_1 = \frac{a}{2}\right) \quad (\text{diagrama da placa})$$

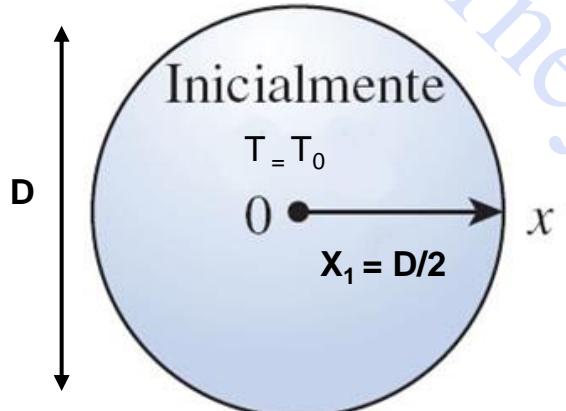
$$Y_r = Y\left(x_1 = \frac{D}{2}\right) \quad (\text{diagrama do cilindro})$$



Fonte: Welty et al. (2017)

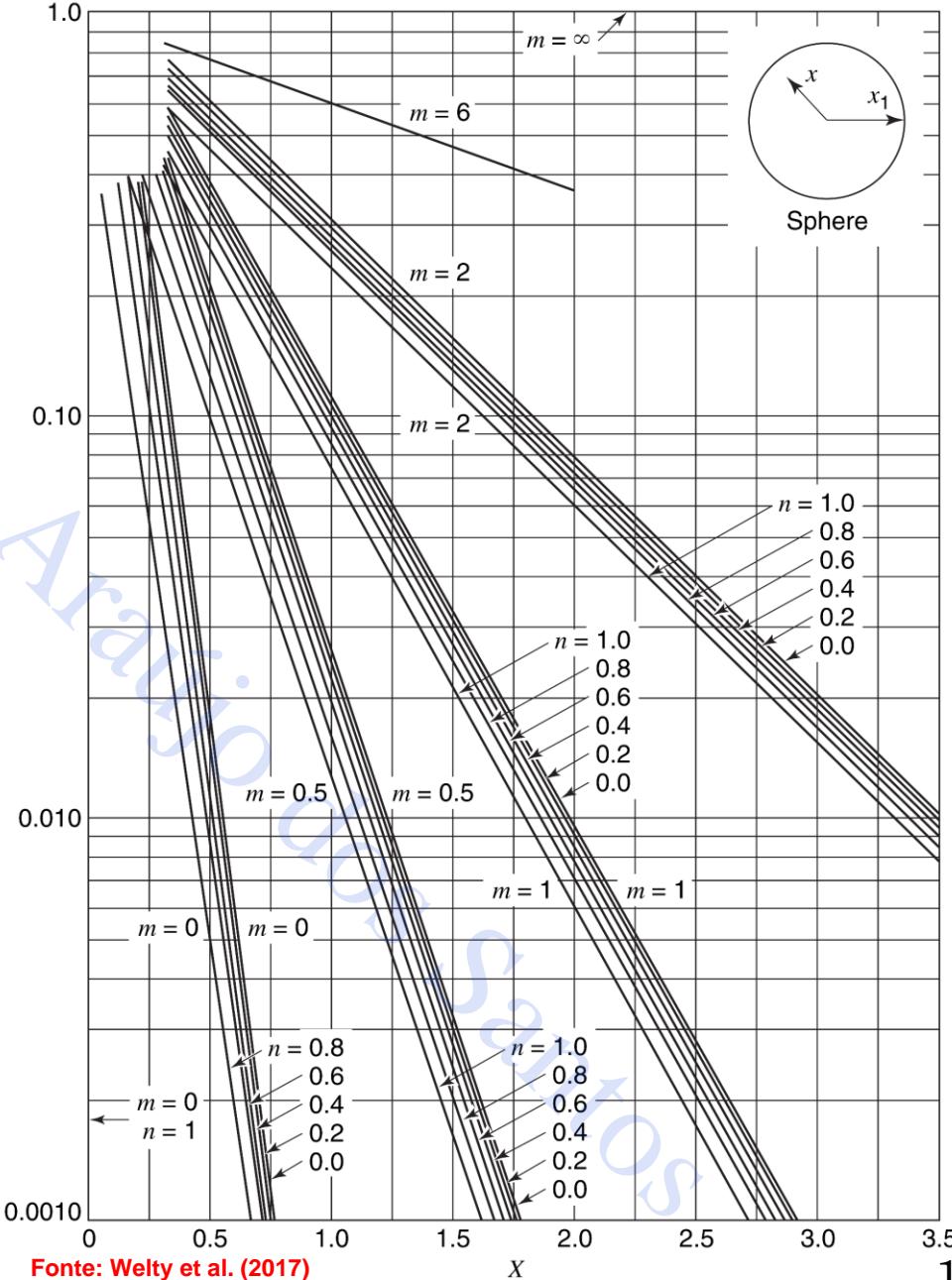
# 7 . Condução Transiente

**ESFERA:** neste caso, considera-se apenas transferência de calor na direção radial



Logo, tem-se:

$$x_1 = \frac{D}{2} \quad \text{e} \quad X = \frac{4\alpha t}{D^2}$$



## 7 . Condução Transiente

**Exercício Proposto 13:** Uma parede de tijolos refratários [ $k = 1,92 \text{ W}/(\text{m.K})$ ],  $c_p = 919 \text{ J}/(\text{kg.K})$  e  $\rho = 2310 \text{ kg/m}^3$  de  $0,5 \text{ m}$  de espessura e inicialmente a  $200 \text{ K}$  é repentinamente exposta a um gás quente, mantido a  $1267 \text{ K}$ . Se o coeficiente de transferência de calor por convecção é  $7,38 \text{ W}/(\text{m}^2.\text{K})$  e a outra face da parede é isolada, determine:

- a) O tempo necessário para que a temperatura no centro da parede seja de  $600 \text{ K}$ .
- b) A temperatura da face isolada após transcorrido o tempo calculado anteriormente (letra a).

# Bibliografia

**INCROPERA, F.P. e DEWITT, D.P.** *Fundamentos de transferência de calor e massa*, 6<sup>a</sup> ed., LTC, 2008.

**ÇENGEL, Y.A e GHAJAR, A.J.**; *Transferência de calor e massa*, McGraw Hill, 4<sup>a</sup> edição, 2012.

**WELTY, J. R.; RORRER, G. L.; FOSTER, D.G.** Fundamentos de Transferência de Momento, de Calor e de Massa; tradução e revisão técnica Verônica Calado, 6. ed., Rio de Janeiro: LTC, 2017.