



Instituto de Química
IQ - UFG



ENGENHARIA QUÍMICA
Universidade Federal de Goiás

Estática dos Fluidos

Distribuição de pressão em um fluido

Professor Dyrney Araújo dos Santos
Universidade Federal de Goiás
Curso de Engenharia Química
Disciplina: Fenômenos de Transporte 1
site: www.dyrney.com

3. Estática dos Fluidos

3.1 Forças que agem sobre uma partícula de fluido em repouso

As forças que agem sobre uma partícula de fluido em repouso são: **força de pressão** e **força gravitacional**. Ter em mente que as forças viscosas só agem sobre um fluido em movimento.

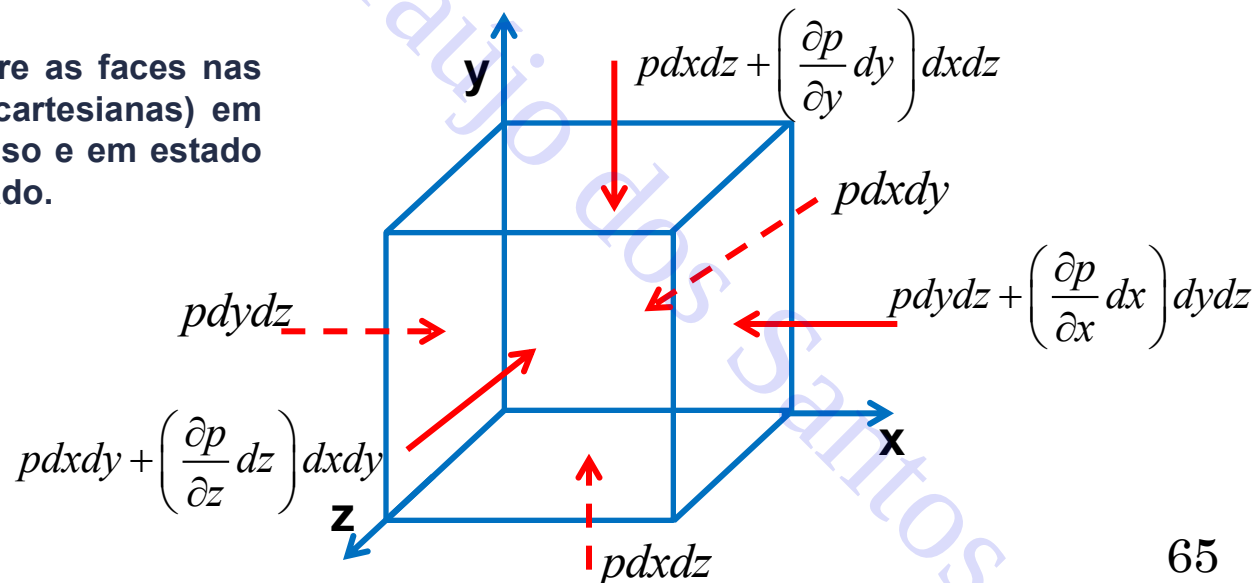
Estas forças podem ser classificadas em:

- **Forças de superfície:** são aquelas forças que atuam diretamente sobre as faces da partícula de fluido, tal como a força de pressão, dentre outras tensões (normais e cisalhantes).
- **Forças de campo:** são aquelas decorrentes dos potenciais eletromagnético ou gravitacional, agindo sobre toda a massa da partícula de fluido. Aqui iremos considerar apenas a força gravitacional

A) **Força de pressão:** a pressão é uma tensão normal que age sempre no sentido “**para dentro**” do corpo. Ela causa uma força líquida em uma partícula de fluido quando ela varia espacialmente

Considere a pressão agindo sobre as faces nas direções **x**, **y** e **z** (coordenadas cartesianas) em uma partícula de fluido em repouso e em estado estacionário, como na figura ao lado.

$$p = p(x, y, z)$$



3. Estática dos Fluidos

3.1 Forças que agem sobre uma partícula de fluido em repouso

A força de pressão líquida na direção **x** sobre a partícula de fluido é dada por:

$$dF_x = p dydz - \left[p dydz + \left(\frac{\partial p}{\partial x} dx \right) dydz \right] \quad \text{ou} \quad dF_x = -\frac{\partial p}{\partial x} dx dydz$$

De maneira semelhante, as forças de pressão líquidas **dF_y** e **dF_z**, são dadas abaixo:

$$dF_y = -\frac{\partial p}{\partial y} dx dydz \quad \text{e} \quad dF_z = -\frac{\partial p}{\partial z} dx dydz$$

Combinando as componentes da força de pressão anteriores na forma vetorial, tem-se:

$$d\vec{F} = \left(-\frac{\partial p}{\partial x} \vec{i} - \frac{\partial p}{\partial y} \vec{j} - \frac{\partial p}{\partial z} \vec{k} \right) dx dydz$$

Pode-se identificar o termo entre parênteses como o **negativo do vetor gradiente de pressão**. Representando por **f_{pressão}** a força líquida de pressão por unidade de volume do elemento, teremos:

$$\boxed{d\vec{f}_{\text{pressão}} = -\nabla p}$$

Logo, não é a pressão, mas sim o gradiente de pressão que causa uma força líquida.

3. Estática dos Fluidos

3.1 Forças que agem sobre uma partícula de fluido em repouso

B) Força gravitacional: Considerando uma partícula de fluido em coordenadas cartesianas, a força gravitacional agindo sobre toda a sua massa pode ser representada como

$$d\vec{F}_{grav} = \rho \vec{g} dx dy dz$$

ou, no caso da força gravitacional por unidade de volume do elemento, tem-se:

$$d\vec{f}_{grav} = \rho \vec{g}$$

Finalmente, aplicando a Segunda Lei de Newton a uma partícula de fluido em repouso, teremos, visto que neste caso a aceleração $\mathbf{a} = 0$:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} = 0 \longrightarrow d\vec{f}_{press\tilde{a}o} + d\vec{f}_{grav} = 0 \longrightarrow \nabla p = \rho \vec{g}$$

Esta equação é conhecida como a “Equação da Estática dos Fluidos”, sendo que a importância dela será demonstrada a seguir

A Equação da Estática dos Fluidos é vetorial e diferencial e representa uma distribuição de pressão hidrostática no interior de qualquer fluido em repouso, independente de sua reologia. Para as três direções cartesianas, tem-se:

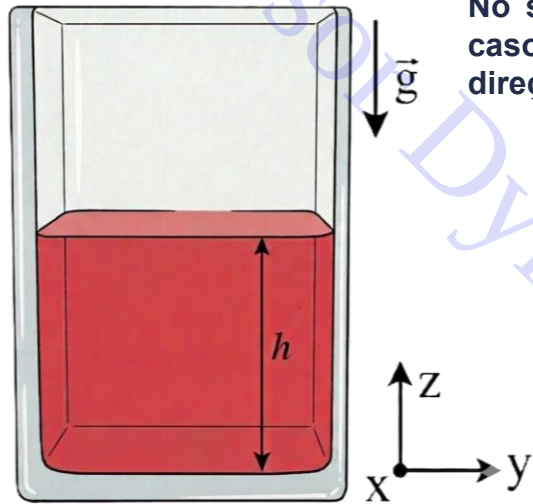
$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho g_x$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \rho g_y$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \rho g_z$$

3. Estática dos Fluidos

3.1 Forças que agem sobre uma partícula de fluido em repouso



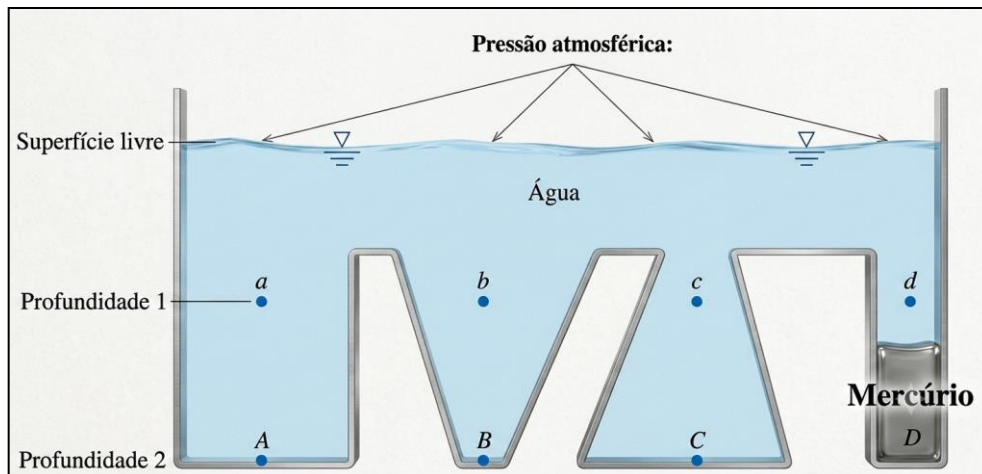
No sistema de coordenadas usual, **z** é “para cima” (figura ao lado). Neste caso, as componentes em **x** e **y** se anulam, visto que a gravidade só atua na direção vertical, sobrando apenas a componente em **z**. Logo:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g$$

A pressão em um fluido estático varia somente com a direção vertical e independe da forma do recipiente. Ela é a mesma em todos os pontos em um dado plano horizontal e no interior do mesmo fluido e aumenta com a profundidade no fluido.

Ilustração - Vasos Comunicantes: A superfície livre do recipiente é atmosférica e forma um plano horizontal.



As pressões nos pontos **a**, **b**, **c** e **d** são iguais, pois estão em profundidades iguais na água;

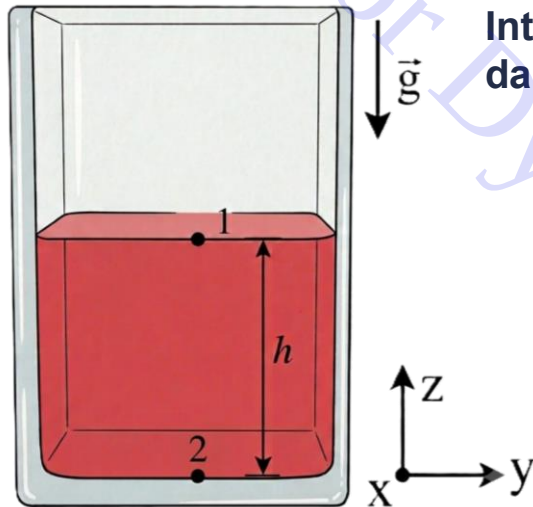
As pressões nos pontos **A**, **B** e **C** são iguais, pois estão em profundidades iguais na água, e maiores do que nos pontos **a**, **b**, **c** e **d**;

O ponto **D** tem uma pressão maior do que em **A**, **B** e **C**, porque, apesar de estarem na mesma profundidade, ele está no interior do mercúrio, que é treze vezes mais denso do que a água.

3. Estática dos Fluidos

3.2 Distribuição de Pressão Hidrostática

A) Pressão hidrostática nos líquidos



Integrando a equação da hidrostática entre os pontos **1** e **2** da figura ao lado, tem-se:

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g \quad \longrightarrow \quad \int_{p_1}^{p_2} dp = - \int_{z_1}^{z_2} \rho g dz$$

$$p_2 - p_1 = - \int_{z_1}^{z_2} \rho g dz$$

Para resolver a integração acima é necessário saber como a massa específica varia com **z**. Assumindo que a massa específica dos líquidos é constante nos cálculos em hidrostática, tem-se:

$$p_2 - p_1 = \rho g h \quad \text{ou} \quad p_2 = p_1 + \rho g h$$

OBS.: Logo, a pressão no ponto **2** é igual a pressão mais externa agindo sobre a superfície do fluido (pressão atmosférica) mais a pressão hidrostática, devido à coluna de fluido sobre o ponto **2**

OBS.: $\rho \times g$ é conhecido como peso específico do fluido, comumente representado pela letra grega γ

3. Estática dos Fluidos

3.2 Distribuição de Pressão Hidrostática

A) Pressão hidrostática nos líquidos

Barômetro de mercúrio: instrumento utilizado para a medida da pressão atmosférica local, composto por um tubo cheio de mercúrio invertido quando submerso em um reservatório.



Na extremidade fechada há a formação de vácuo visto que o mercúrio tem uma pressão de vapor extremamente pequena à temperatura ambiente.

Aplicando a equação anterior com $p_1 = 0$ (vácuo) em $z_1 = h$ e $p_2 \approx p_a$ (mesmo nível) em $z_2 = 0$, tem-se:

$$p_a - 0 = -\rho_M g (0 - h) \longrightarrow p_a = \rho_M g h$$

De outra forma, pode-se encontrar h para uma pressão ambiente conhecida:

$$h = \frac{p_a}{\rho_M g}$$

Logo, pela equação acima, ao nível do mar, com $p_a = 1,014 \times 10^5 \text{ Pa}$, $\rho_M = 13600 \text{ kg.m}^{-3}$ e $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$, a altura barométrica é $h = 0,760 \text{ m}$ ou 760 mm de mercúrio. Isto equivale à conversão de unidades: $1 \text{ atm} = 760 \text{ mmHg}$. Qual seria o tamanho necessário da coluna caso o mercúrio fosse substituído pela água? 70

3. Estática dos Fluidos

3.2 Distribuição de Pressão Hidrostática

B) Pressão hidrostática nos gases

No caso dos gases, a massa específica varia com a pressão e, conseqüentemente, com a posição **z**. Logo, não pode ser retirada da integral na equação da hidrostática

Considerando que o gás se comporte como um gás ideal, tem-se:

$$pV = nRT \longrightarrow p = \frac{mRT}{VM} = \rho \frac{RT}{M} \longrightarrow \rho = \frac{pM}{RT}$$

Substituindo na equação da hidrostática e integrando, tem-se:

$$\frac{dp}{p} = -\frac{Mg}{RT} dz \longrightarrow \int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{p} = -\int_{z_1}^{z_2} \frac{Mg}{RT} dz$$

Considerando um sistema isotérmico, a integração produz:

$$p_2 = p_1 \exp \left[-\frac{Mg}{RT} (z_2 - z_1) \right]$$

3. Estática dos Fluidos

3.3 Aplicação à Manometria

Manometria: área que estuda as técnicas de medida de pressão por meio de instrumentos denominados de manômetros. Segue abaixo a diferença entre a **Pressão Absoluta** (P_{abs}), a **Pressão Manométrica** (P_{man}) e a **Pressão Vacuométrica** (P_{vac})

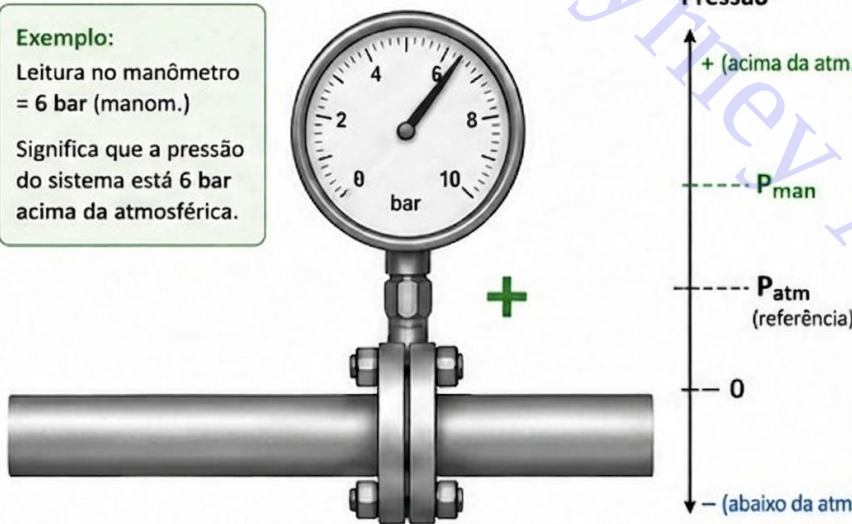
1) PRESSÃO MANOMÉTRICA (P_{man})

É a pressão medida acima da pressão atmosférica.

Exemplo:

Leitura no manômetro
= 6 bar (manom.)

Significa que a pressão
do sistema está 6 bar
acima da atmosférica.



Relação:

$$P_{man} = P_{abs} - P_{atm}$$

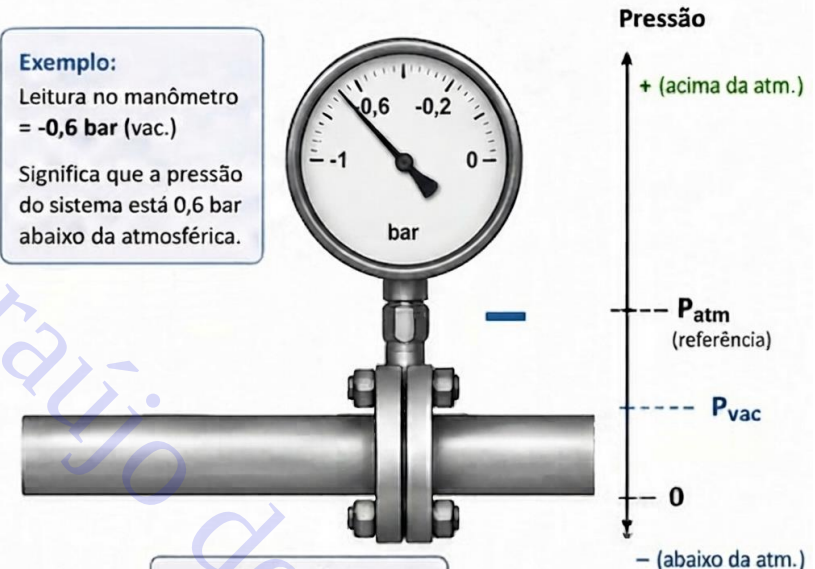
2) PRESSÃO VACUOMÉTRICA (P_{vac})

É a pressão medida abaixo da pressão atmosférica (vácuo).

Exemplo:

Leitura no manômetro
= -0,6 bar (vac.)

Significa que a pressão
do sistema está 0,6 bar
abaixo da atmosférica.



Relação:

$$P_{vac} = P_{atm} - P_{abs}$$

(valor negativo)

OBS.:

1) O instrumento conectado à tubulação é denominado de manômetro de Bourdon e sempre mede a pressão com relação à pressão atmosférica local (iremos ver este instrumento adiante).

2) Já a pressão absoluta (P_{abs}) mede a pressão com relação ao vácuo absoluto.

3. Estática dos Fluidos

3.3 Aplicação à Manometria

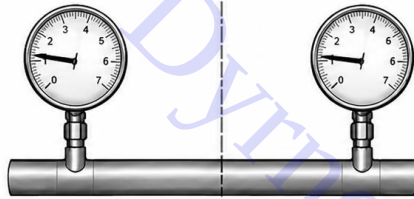
Manometria: área que estuda as técnicas de medida de pressão por meio de instrumentos denominados de manômetros.

A PRESSÃO MANOMÉTRICA É A MESMA NO MESMO SISTEMA EM LUGARES DIFERENTES (EX.: BRASIL E BOLÍVIA)?



Brasil

$P_{\text{atm}} \approx 1,013 \text{ bar}$
(ao nível do mar)



Bolívia

$P_{\text{atm}} \approx 0,832 \text{ bar}$
(ao nível do mar)



Não.

Se o sistema estiver nas mesmas condições (mesma pressão absoluta interna), a pressão manométrica será **diferente**, pois depende da pressão atmosférica local.

Exemplo: Se $P_{\text{abs}} = 2,013 \text{ bar}$ (abs) em ambos os lugares:

- No Brasil: $P_{\text{man}} = 2,013 - 1,013 = 1,000 \text{ bar}$
- Na Bolívia: $P_{\text{man}} = 2,013 - 0,832 = 1,181 \text{ bar}$

Conclusão:

P_{man} **NÃO** é a mesma.



E A PRESSÃO ABSOLUTA, SERIA A MESMA?

Sim.

A pressão absoluta independe do local (Brasil, Bolívia ou qualquer lugar), pois é referida ao vácuo absoluto.

Se a pressão absoluta do sistema é $2,013 \text{ bar}$ (abs), ela será $2,013 \text{ bar}$ (abs) em qualquer lugar da Terra.



Importante:

A pressão atmosférica muda com:

- Altitude
- Condições climáticas
- Local geográfico



Por isso, manômetros (manométricos ou vacuométricos) sempre dependem do valor da P_{atm} local.

CONCLUSÃO GERAL:

As pressões manométrica e vacuométrica dependem da pressão atmosférica local, enquanto que a pressão absoluta é universal (referida ao vácuo absoluto)

3. Estática dos Fluidos

3.3 Aplicação à Manometria

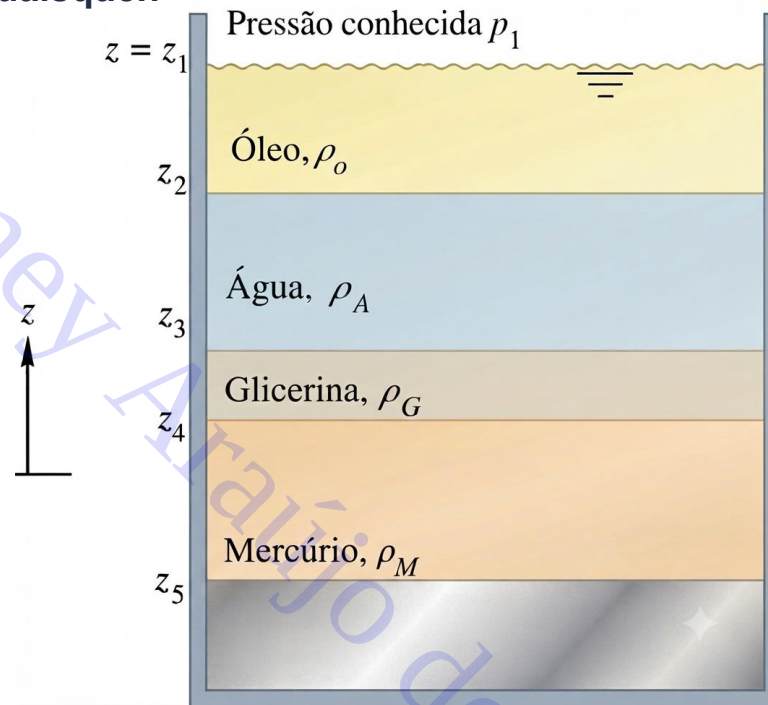
Aplicação: uma coluna estática de um ou mais líquidos ou gases pode ser usada para medir diferenças de pressão entre dois pontos quaisquer.

Ex: coluna de múltiplos fluidos

A variação de pressão em cada fluido pode ser calculada separadamente ou de uma forma global, somando as contribuições de cada coluna de fluido.

A variação total ($p_5 - p_1$) é calculada somando-se as sucessivas variações ($p_2 - p_1$, $p_3 - p_2$, $p_4 - p_3$ e $p_5 - p_4$)

Logo, tem-se:



$$p_5 - p_1 = -\rho_o g(z_2 - z_1) - \rho_A g(z_3 - z_2) - \rho_G g(z_4 - z_3) - \rho_M g(z_5 - z_4)$$

ou,

$$p_5 = p_1 + \rho_o g(z_1 - z_2) + \rho_A g(z_2 - z_3) + \rho_G g(z_3 - z_4) + \rho_M g(z_4 - z_5)$$

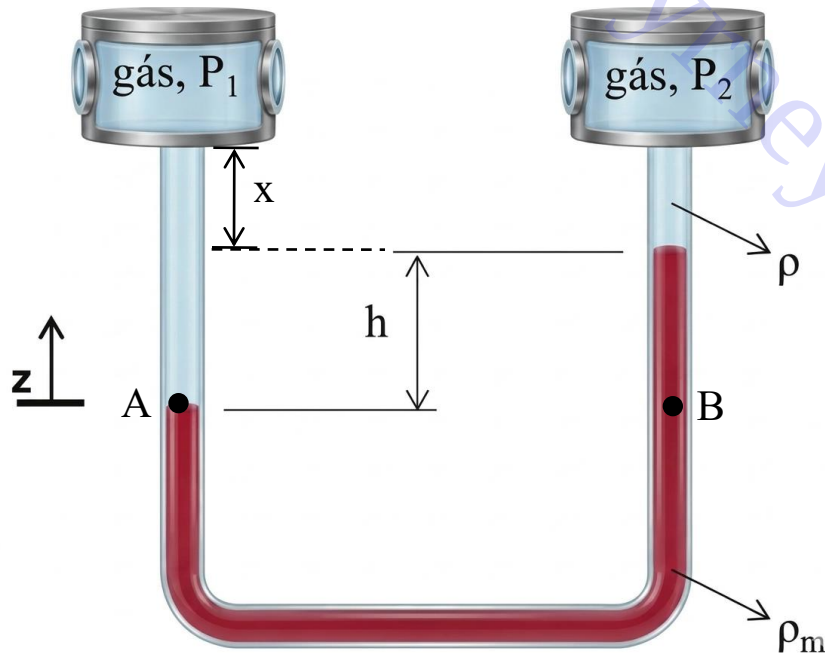
Logo, a pressão na base do fluido mercúrio ($z = z_5$) é igual à pressão na superfície em $z = z_1$ mais o somatório das pressões devido às colunas de fluido.

3. Estática dos Fluidos

3.3 Aplicação à Manometria

Há inúmeros meios para se medir uma pressão ou uma diferença de pressão de um determinado sistema. Dentre eles, os mais comuns são:

A) **Manômetros do Tipo Tubo em U:** consiste num tubo preenchido parcialmente por um líquido, cujas extremidades são conectadas às fontes de pressão.



Da hidrostática, tem-se:

$$p_A = p_B \quad \text{sendo} \quad \begin{cases} p_A = p_1 + \rho g(x + h) \\ p_B = p_2 + \rho g x + \rho_m g h \end{cases}$$

Logo,

$$p_1 + \rho g(x + h) = p_2 + \rho g x + \rho_m g h$$

$$p_1 + \cancel{\rho g x} + \rho g h = p_2 + \cancel{\rho g x} + \rho_m g h$$

$$p_1 - p_2 = g h (\rho_m - \rho)$$

O manômetro acima está medindo apenas uma diferença de pressão (**pressão relativa**). Neste caso, não é possível conhecer os valores absolutos de P_1 e P_2 mas tão somente a diferença que existe entre eles.

3. Estática dos Fluidos

3.3 Aplicação à Manometria

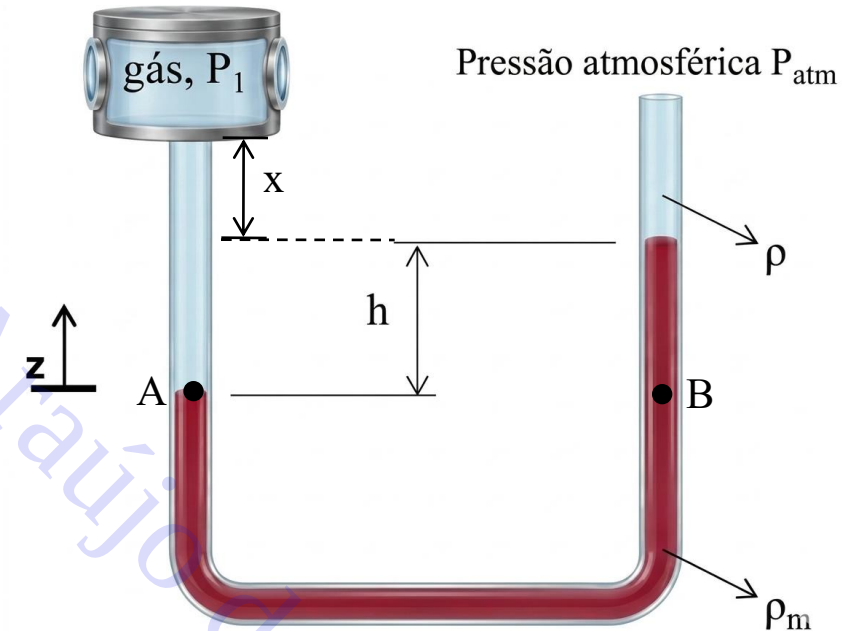
Para se medir o valor da pressão absoluta de um reservatório de gás, o Manômetro do tipo Tubo em U deve ser instalado conforme abaixo (extremidade aberta para a atmosfera):

Logo, aplicando-se o mesmo procedimento anterior, tem-se:

$$p = p_{atm} + \underbrace{gh(\rho_m - \rho)}_{\text{pressão manométrica}}$$

↑
pressão absoluta

↑
pressão manométrica



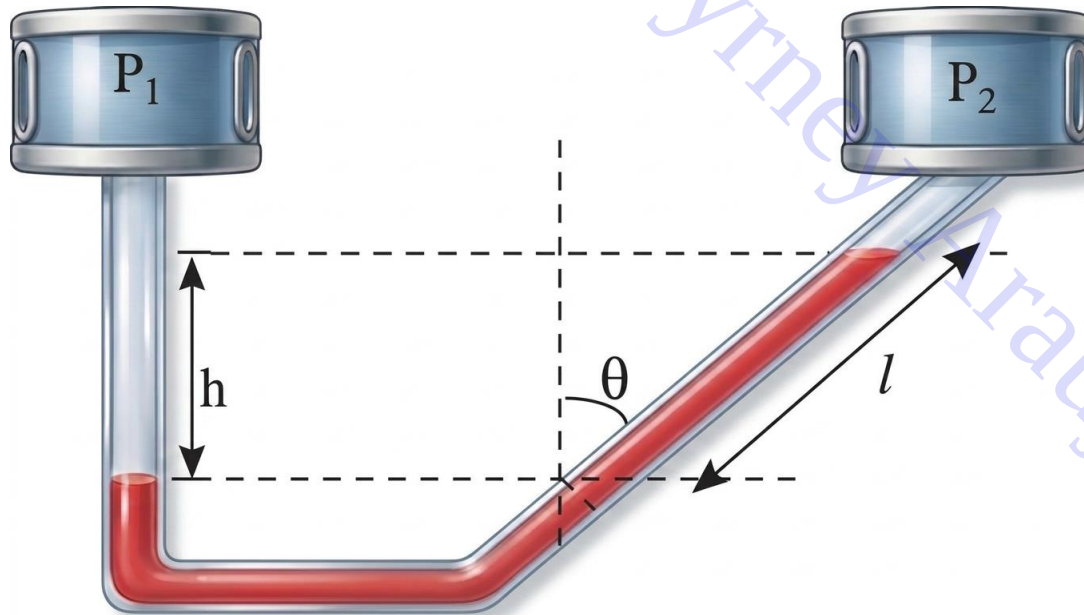
Comentários adicionais:

- 1) fixando-se $(p_1 - p_2)$ ou $(p - p_{atm})$, quanto maior for $(\rho_m - \rho)$, menor será h (menor precisão na medida);
- 2) o fluido manométrico deve ser escolhido de forma a fornecer valores de h que favoreçam a precisão da medida;
- 3) para aumentar a precisão da medida, no caso de baixos valores de h , às vezes utiliza-se um Manômetro de Tubo em U Inclinado, como será mostrado a seguir.

3. Estática dos Fluidos

3.3 Aplicação à Manometria

B) Manômetros do Tipo Tubo em U Inclinado: similar ao anterior, porém com um dos lados inclinado em um ângulo θ



Foi mostrado que, para o manômetro em U, tem-se:

$$p_1 - p_2 = gh(\rho_m - \rho)$$

Da figura ao lado, conclui-se que

$$h = l \cos(\theta)$$

Logo, para o tubo inclinado, tem-se:

$$p_1 - p_2 = gl \cos(\theta)(\rho_m - \rho)$$

Conhecido o ângulo θ , obtém-se uma medida mais precisa da diferença de pressão, uma vez que o comprimento l é maior do que a altura h .

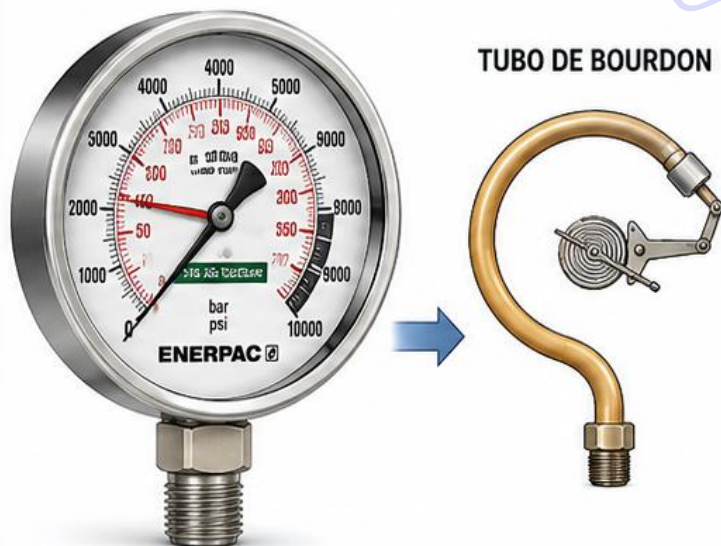
3. Estática dos Fluidos

3.3 Aplicação à Manometria

C) **Manômetro de Bourdon**: analógico ou digital, são utilizados para medir a **pressão manométrica** do sistema no qual está inserido, ou seja, mede a pressão em relação à pressão ambiente em que o envolve.

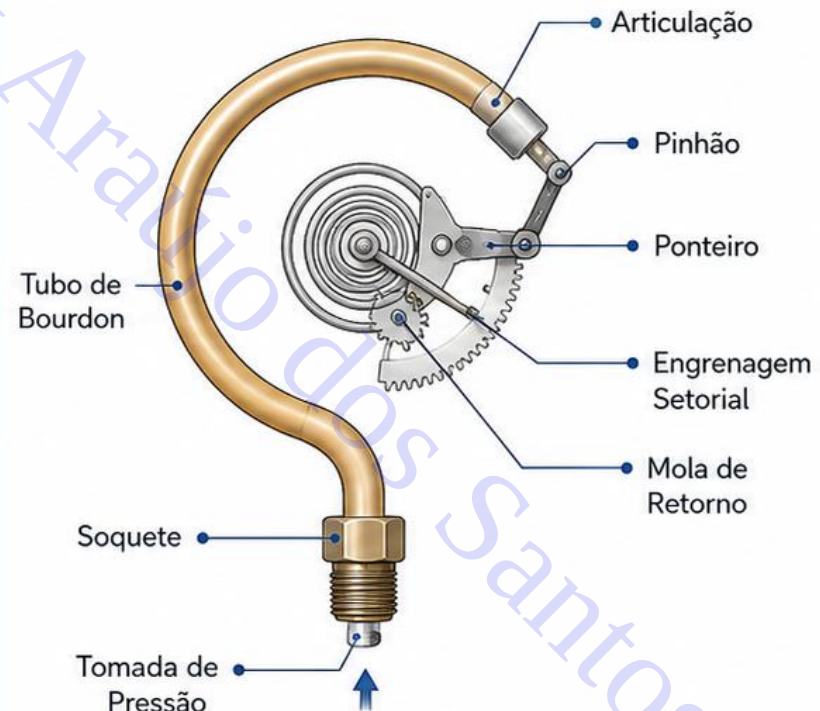
Princípio de funcionamento: Conforme há a variação da pressão, a espiral abre ou fecha produzindo uma deflexão no ponteiro do mostrador proporcional à diferença entre a pressão que está sendo medida e a pressão ambiente a que o manômetro está submetido.

1 VISÃO GERAL



MANÔMETRO
ANALÓGICO BOURDON

2 MECANISMO INTERNO

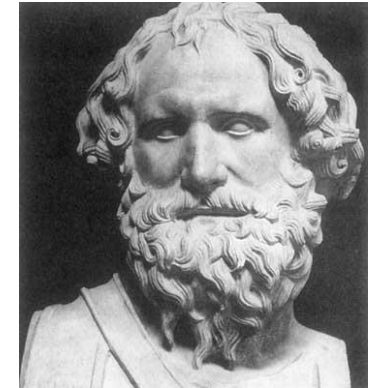


3. Estática dos Fluidos

3.5 Força de Empuxo

Os mesmos princípios usados no cálculo das forças hidrostáticas podem ser aplicados para calcular a força líquida de pressão sobre um corpo completamente submerso ou flutuante

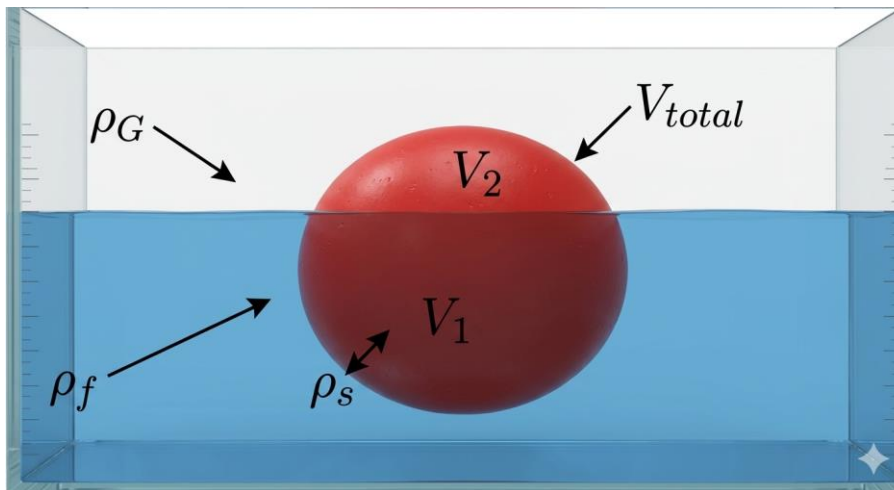
Lei do empuxo de Arquimedes: Um corpo imerso em um fluido está sujeito a uma força de empuxo vertical igual ao peso do fluido que ele desloca



Arquimedes de Siracusa
(287 a.C. – 212 a.C.)

(Matemático, filósofo, engenheiro,
inventor e astrônomo grego)

Considere um determinado corpo sólido parcialmente imerso num líquido e em equilíbrio
(resultante das forças que atua sobre ele é nula)



$$\vec{F}_{\text{peso}} + \vec{F}_{\text{atmosfera}} = \vec{F}_{\text{empuxo}}$$

$$\int_0^V \rho_s g dV + \int_0^{V_2} \nabla P_2 dV = \int_0^{V_1} \nabla P_1 dV$$

sendo : $V = V_1 + V_2$

3. Estática dos Fluidos

3.5 Força de Empuxo

Visto que: $\begin{cases} \nabla P_1 = \rho_f g \\ \nabla P_2 = \rho_G g \end{cases} \rightarrow \int_0^V \rho_S g dV + \int_0^{V-V_1} \rho_G g dV = \int_0^{V_1} \rho_f g dV$

Logo,

$$\rho_S g V + \rho_G g (V - V_1) = \rho_f g V_1 \xrightarrow{\text{rearranjando}} \frac{V_1}{V} = \frac{(\rho_G + \rho_S)}{(\rho_G + \rho_f)}$$

Como $\rho_G \ll \rho_f$ e $\rho_G \ll \rho_S$, podemos, finalmente, escrever

$$\frac{V_1}{V} = \frac{\rho_S}{\rho_f}$$

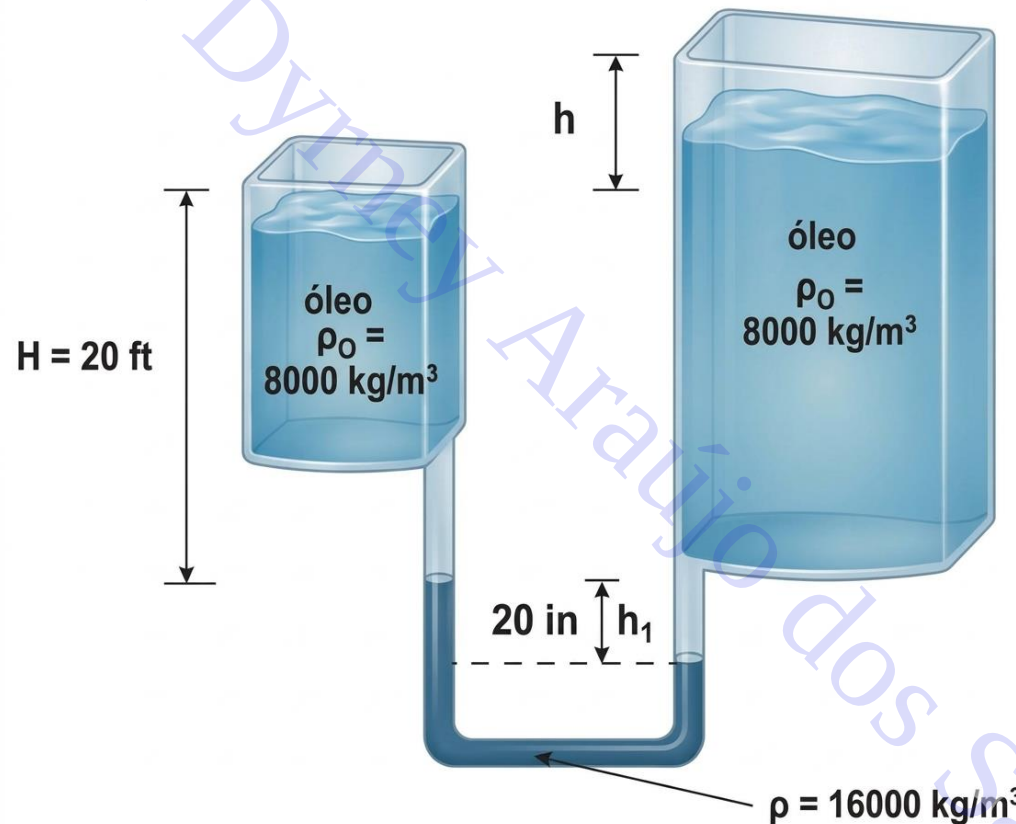
Logo, poderá ocorrer as seguintes situações:

- I – Se $\rho_S < \rho_f$, o corpo ficará parcialmente submerso;
- II – Se $\rho_S = \rho_f$, o corpo ficará suspenso no líquido;
- III – Se $\rho_S > \rho_f$, o corpo afundará.



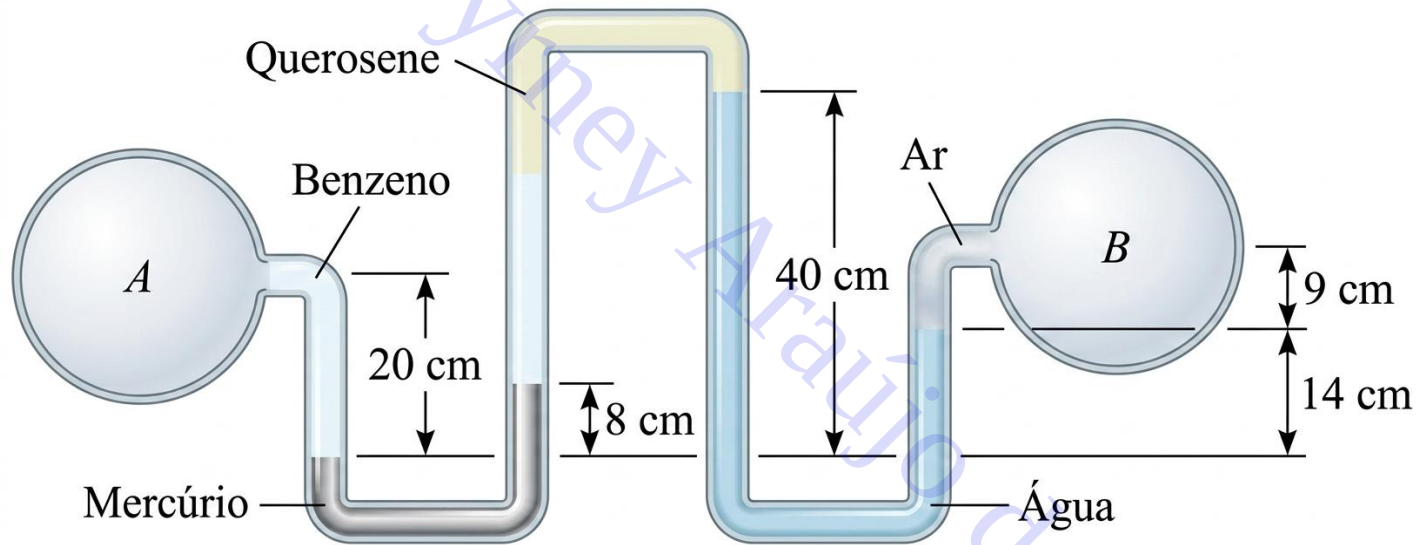
3. Estática dos Fluidos

Exercício Proposto 5: Com base no sistema ilustrado abaixo, encontre o valor da altura h (diferença de altura entre as superfícies dos fluidos presentes nos tanques).



3. Estática dos Fluidos

Exercício Proposto 6: Determine a diferença de pressão (Pa) entre os pontos **A** e **B**. Considere as massas específicas da água, benzeno, querosene, mercúrio e ar iguais a **979 kg/m^3** , **864 kg/m^3** , **$788,5 \text{ kg/m}^3$** , **13310 kg/m^3** e **$1,2 \text{ kg/m}^3$** , respectivamente.



Bibliografia

BIRD, R.B.; STEWART, W.E. e; LIGHTFOOT, E.N. Fenômenos de transporte, 2ª ed., LTC, 2004.

ÇENGEL, Y.A e CIMBALA, J.M.; Mecânica dos fluidos, McGraw Hill, 3ª edição, 2015.

WHITE, F. M. Mecânica dos Fluidos. 6ª edição. MCGRAW-HILL, 2011.