ENGENHARIA QUÍMICA
Universidade Federal de Goiás

Prof. Dyrney Araújo dos Santos

Método dos Volumes Finitos (MVF)
Acoplamento Pressão-Velocidade

Professor Dyrney Araújo dos Santos
Universidade Federal de Goiás
Engenharia Química
Disciplina: Introdução à Fluidodinâmica Computacional
site: www.dyrney.com

Professor Dyrney Araújo dos Santos
Universidade Federal de Goiás
Engenharia Química
site: www.dyrney.com

6. Acoplamento Pressão x Velocidade

6.1 Equações de Transporte para o Cálculo do Campo de Velocidade

Os termos advectivos das equações de transporte para uma propriedade ϕ qualquer dependem do campo de velocidade. Até este momento, partimos do pressuposto de que conhecíamos, de alguma forma, o campo de velocidade (Capítulo 5), porém, na prática, não o conhecemos e devemos calculá-lo. Para calcular o campo de velocidade, basta utilizar a equação de transporte na sua forma geral e fazer ϕ igual a *u*, *v* ou *w*.

Considerando um escoamento bidimensional, incompressível e em estado estacionário, teríamos as seguintes equações (observe que retiramos o gradiente de pressão do termo fonte):

- **Momento em x:**

$$\frac{\partial(\rho uu)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho vu)}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial y}\right)-\frac{\partial p}{\partial x}+S_u \qquad \text{Eq. 6.1}$$

- **Momento em y:**

$$\frac{\partial(\rho uv)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho vv)}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial v}{\partial y}\right)-\frac{\partial p}{\partial y}+S_v \qquad \text{Eq. 6.2}$$

- **Continuidade:**

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}=0 \qquad \text{Eq. 6.3}$$

Observação 58: **Podemos observar nas equações acima dois novos problemas a serem tratados aqui:**

1) Os termos advectivos são não-lineares (Ex.: $\rho \times u^2$) e devemos tratar estas não-linearidades;

2) O campo de pressão não é conhecido e não podemos mais usar uma equação de estado visto que o escoamento aqui é incompressível, ou seja, devemos obter uma equação para a evolução do campo de pressão!

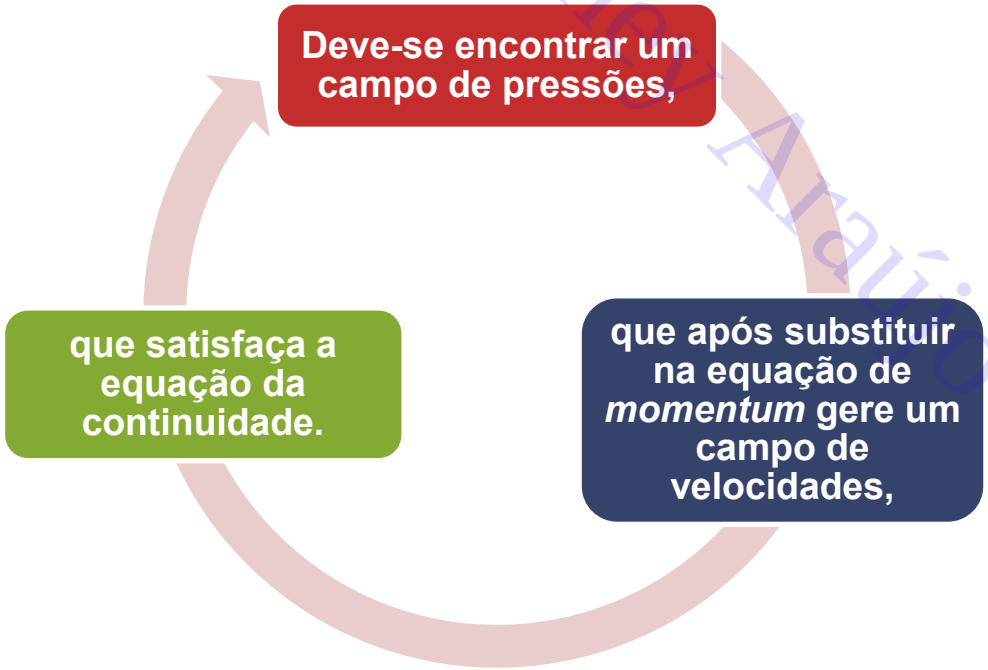
Prof. Dyrney Araújo dos Santos

Professor Dyrney Araújo dos Santos
Universidade Federal de Goiás
Engenharia Química
site: www.dyrney.com

6. Acoplamento Pressão x Velocidade

6.2 Estratégia para a Solução de um Escoamento Incompressível

No caso de um escoamento incompressível, a seguinte estratégia deve ser utilizada para se obter os campos de velocidade e pressão:



Logo, a equação da continuidade é usada para verificar se o campo de velocidades obtido por meio do campo de pressão é fisicamente coerente, ou seja, satisfaz a conservação da massa.

Observação 59: **Ambos os problemas, não-linearidade e obtenção do campo de pressão, são resolvidos por meio de algoritmos conhecidos como "Algoritmos de Acoplamento Pressão×Velocidade", que iremos discutir neste capítulo.**

Prof. Dyrney Araújo dos Santos

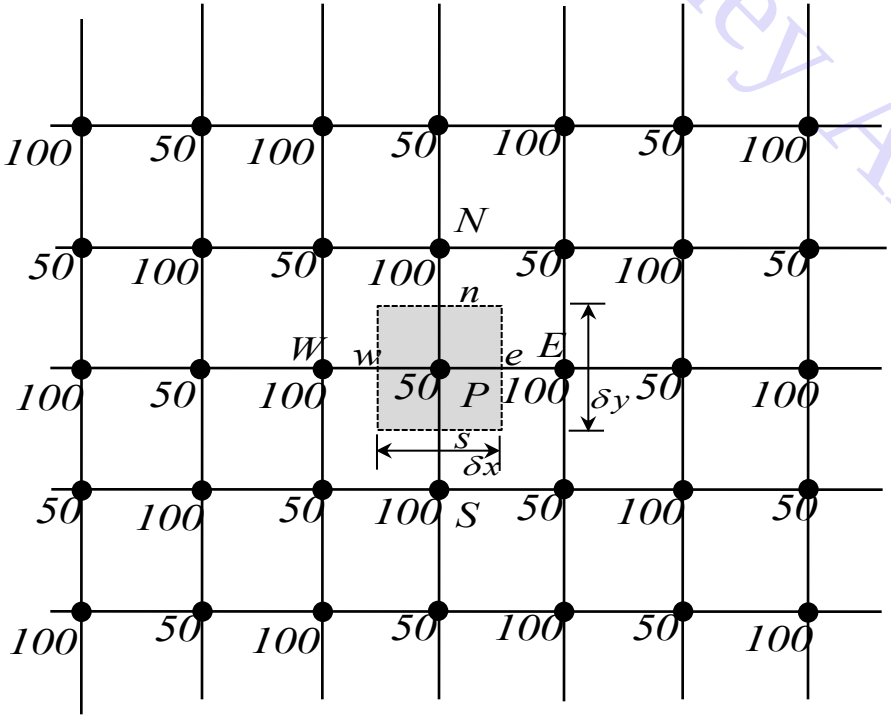
Professor Dyrney Araújo dos Santos
Universidade Federal de Goiás
Engenharia Química
site: www.dyrney.com

6. Acoplamento Pressão x Velocidade

6.3 Problemas de Malhas Co-Localizadas

Antes de propormos a solução dos campos de velocidade e pressão, devemos nos ater ao problema de se usar malhas co-localizadas. Até este momento, a princípio, todas as variáveis (escalares ou vetoriais) poderiam ser armazenadas nos centros dos volumes, o que é conhecido como malha co-localizada.

Iremos tomar como exemplo a discretização das equações de *momentum* na seguinte malha computacional contendo os seguintes valores de pressão, compondo um campo de pressão oscilatório.



Integrando as Eqs. 6.1 e 6.2 sobre o volume centrado em *P* e considerando aqui Diferenças Centradas para a interpolação da pressão, teremos os seguintes resultados para os gradientes de pressão:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{P_e - P_w}{\delta x} = \frac{\left(\frac{P_E + P_P}{2}\right) - \left(\frac{P_P + P_W}{2}\right)}{\delta x} = \frac{P_E - P_W}{2\delta x}$$

De forma similar, na direção *y*, teremos: $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{P_N - P_S}{2\delta y}$

PROBLEMAS OBSERVADOS:

1) Esta malha se torna incapaz de detectar campos de pressões oscilatórios, visto que os gradientes calculados aqui são todos nulos, o que não corresponde com os valores reais mostrados na malha;

2) Neste caso, a pressão passa a ser avaliada com uma ordem de precisão mais baixa pois a equação para *u*, por exemplo, não envolve a pressão no volume *P*; é como se a malha fosse mais "grosseira" do que a malha real.

Prof. Dyrney Araújo dos Santos

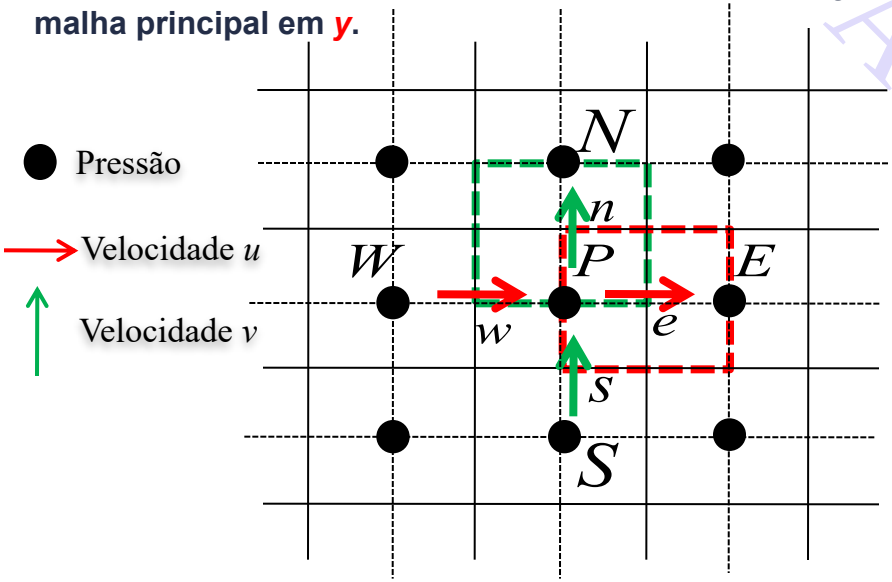
Professor Dyrney Araújo dos Santos
Universidade Federal de Goiás
Engenharia Química
site: www.dyrney.com

6. Acoplamento Pressão x Velocidade

6.4 Conceito de Malhas "Deslocadas"

A solução para o problema de malhas co-localizadas é utilizar malhas "deslocadas", ou seja, todas as propriedades escalares, tais como pressão, densidade etc., são armazenadas nos centros dos volumes da "malha principal", como feito até o momento, enquanto que as componentes do vetor velocidade *u*, *v* e *w*, serão armazenadas em malhas "adicionais" deslocadas de meio volume nas direções *x*, *y* e *z*, respectivamente. Neste caso, em um problema tridimensional, teríamos que trabalhar com quatro malhas computacionais, uma principal e três "deslocadas".

No exemplo de malha "deslocada" abaixo (bidimensional), a pressão é armazenada no centro na malha principal representada por "•", a componente *u* é armazena no centro da malha deslocada de meio volume na direção *x* representada por (→), coincidindo com a face do volume da malha principal em *x*, e a componente *v* é armazena no centro da malha deslocada de meio volume na direção *y* representada por (↑), coincidindo com a face do volume da malha principal em *y*.



Integrando, agora, as Eqs. 6.1 e 6.2 sobre os volumes centrados em "e" e "n", respectivamente, e considerando Diferenças Centradas para a interpolação da pressão, teremos:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{P_E - P_P}{\delta x} \quad \text{e} \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{P_N - P_P}{\delta y}$$

OBSERVE QUE:

1) Este é um arranjo fisicamente consistente, pois, entre outros fatores, as velocidades estão localizadas adequadamente para o balanço de massa, visto que agora estão centradas entre pressões!

2) Considerando o campo de pressão oscilatório do slide anterior, os gradientes agora não são mais nulos!

3) Visto que, agora, a integração da equação para o transporte de ϕ é realizada na malha "principal", enquanto que as velocidades são integradas nas malhas "deslocadas", não é necessário, neste caso, uma interpolação para as velocidades, visto que elas já são analisadas nas faces do volume "principal"!

Prof. Dyrney Araújo dos Santos

Professor Dyrney Araújo dos Santos
Universidade Federal de Goiás
Engenharia Química
site: www.dyrney.com

6. Acoplamento Pressão x Velocidade

6.5 Solução dos Campos de Velocidade e Pressão

Como dito anteriormente, os problemas de não-linearidade e da obtenção do campo de pressão são resolvidos por meio de "Algoritmos de Acoplamento Pressão×Velocidade"

Alguns destes algoritmos são:

Algoritmos de Acoplamento Pressão×Velocidade

- **SIMPLE (*Semi IMPlicit Linked Equations*) – Patankar e Spalding (1972)**
- **SIMPLER (SIMPLE-Revisado) – Patankar (1980)**
- **SIMPLEC (SIMPLE-Consistente) – Van Doormal e Raithby (1984)**
- **PISO (Pressure Implicit with Splitting of Operators) – Issa (1986)**
- **PIMPLE (SIMPLE + PISO)**

A seguir será apresentado, como exemplo, o Algoritmo SIMPLE. Para maiores detalhes sobre os demais algoritmos, ver VERSTEEG e MALALASEKERA (2007).

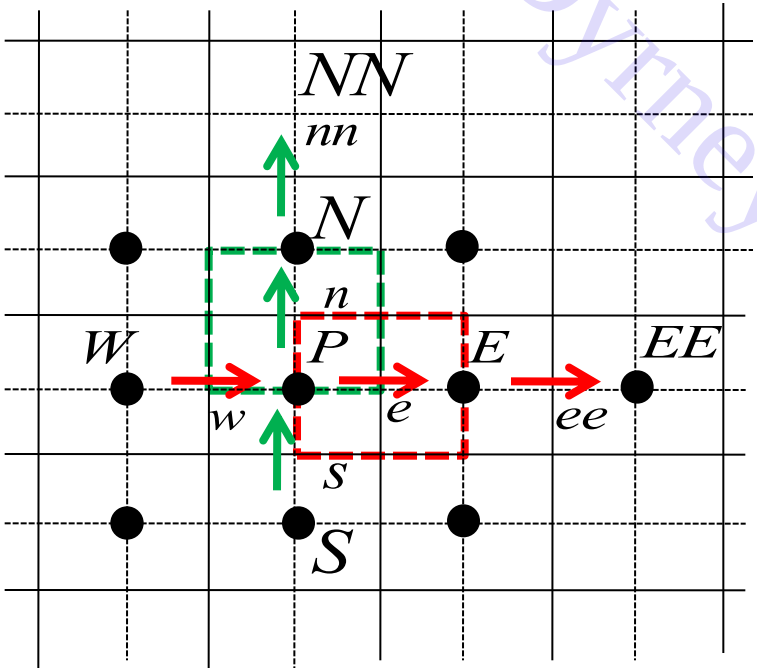
Prof. Dyrney Araújo dos Santos

Professor Dyrney Araújo dos Santos
Universidade Federal de Goiás
Engenharia Química
site: www.dyrney.com

6. Acoplamento Pressão x Velocidade

6.5 Solução dos Campos de Velocidade e Pressão

EXEMPLO: APLICAÇÃO DO ALGORITMO SIMPLE



Integrando as Eqs. 6.1 e 6.2 sobre os volumes centrados em "*e*" e "*n*", respectivamente, e considerando Diferenças Centradas para a pressão (conforme feito anteriormente), teremos, ao final, a seguinte equação padrão do MVF, sendo *b* o termo fonte:

$$a_e u_e = a_{ee} u_{ee} + a_w u_w + b_e - \left(P_E - P_P\right) A_e \qquad \text{Eq. 6.4a}$$

$$a_n v_n = a_{nn} v_{nn} + a_s v_s + b_n - \left(P_N - P_P\right) A_n \qquad \text{Eq. 6.4b}$$

Observação 60: Os coeficientes destas equações envolvem os fluxos mássicos (*F*) e as condutâncias difusivas (*D*) cujos valores nas faces do volume "*e*" devem ser obtidos de acordo com as funções de interpolação apropriadas (diferenças centradas, upwind, híbrido etc.). Para duas dimensões, $A_e = \delta y$ e $A_n = \delta x$.

- **Início do SIMPLE:** Inicializando o problema com um dado campo de pressões arbitrário, dito estimativa da pressão *P** (pressões "chutadas"), pode-se encontrar um campo de velocidades estimado (*u** e *v**). Estes campos de velocidades não são os corretos, logo devem ser corrigidos assim como o campo de pressões.

$$a_e u_e^* = a_{ee} u_{ee}^* + a_w u_w^* + b_e - \left(P_E^* - P_P^*\right) A_e \qquad \text{Eq. 6.5a}$$

e

$$a_n v_n^* = a_{nn} v_{nn}^* + a_s v_s^* + b_n - \left(P_N^* - P_P^*\right) A_n \qquad \text{Eq. 6.5b}$$

Prof. Dyrney Araújo dos Santos

Professor Dyrney Araújo dos Santos
Universidade Federal de Goiás
Engenharia Química
site: www.dyrney.com

6. Acoplamento Pressão x Velocidade

6.5 Solução dos Campos de Velocidade e Pressão

❑ **Correções dos campos de velocidade e pressão no SIMPLE**

Para melhorar os valores "chutados" de pressão (*P), de modo que o campo de velocidades obtido tenda, progressivamente, a satisfazer a equação da continuidade, define-se a seguinte expressão:**

$$P = P^* + P' \quad \text{Eq. 6.6a}$$

Pressão Corrigida; Pressão "Chutada"; Correção da Pressão

De forma similar, definindo as velocidades corrigidas, tem-se:

$$u = u^* + u' \quad \text{Eq. 6.6b}$$

Velocidade Corrigida; Velocidade "estimada"; Correção da Velocidade

$$v = v^* + v' \quad \text{Eq. 6.6c}$$

Velocidade Corrigida; Velocidade "estimada"; Correção da Velocidade

É necessário, agora, obter expressões para *P'*, *u'* e *v'*.

Isolando *u'* e *v'* das equações acima (*Eqs. 6.6b e 6.6c*), tem-se:

$$u' = u - u^* \quad \text{Eq. 6.7a} \qquad \text{e} \qquad v' = v - v^* \quad \text{Eq. 6.7b}$$

Finalmente, substituindo as Eqs. 6.4 e 6.5 nas Eqs. 6.7, teremos, após a subtração:

$$a_e u'_e = a_{ee} u'_{ee} + a_w u'_w - \left(P'_E - P'_P\right) A_e \quad \text{Eq. 6.8a} \qquad \text{e} \qquad a_n v'_n = a_{nn} v'_{nn} + a_s v'_s - \left(P'_N - P'_P\right) A_n \quad \text{Eq. 6.8b}$$

Observação 61: A principal aproximação do SIMPLE é desprezar os "vizinhos" das Eqs. 6.8; logo, as novas equações para as correções se tornam (observe que as pressões foram invertidas pois foram multiplicadas pelo sinal negativo):

$$u'_e = \left(P'_P - P'_E\right) d_e \quad \text{Eq. 6.9a} \qquad \text{e} \qquad v'_n = \left(P'_P - P'_N\right) d_n \quad \text{Eq. 6.9b} \qquad \text{sendo} \quad \begin{cases} d_e = A_e / a_e \\ d_n = A_n / a_n \end{cases}$$

Prof. Dyrney Araújo dos Santos

Professor Dyrney Araújo dos Santos
Universidade Federal de Goiás
Engenharia Química
site: www.dyrney.com

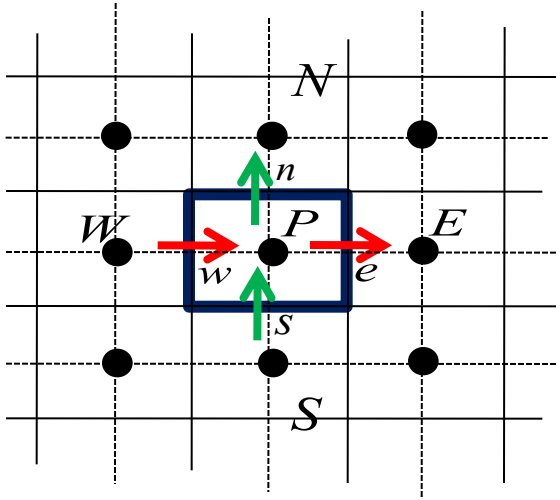
6. Acoplamento Pressão x Velocidade

6.5 Solução dos Campos de Velocidade e Pressão

Podemos, finalmente, retornar às Eqs. 6.6b e 6.6c, para as correções das velocidades:

$$u_e = u_e^* + \left(P'_P - P'_E\right)d_e \quad \text{Eq. 6.10a} \qquad \text{e} \qquad v_n = v_n^* + \left(P'_P - P'_N\right)d_n \quad \text{Eq. 6.10b}$$

Observação 62: Para obter a equação para a correção do campo de pressão, iremos utilizar a equação da continuidade abaixo:



$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0$$

Integrando a equação da continuidade sobre o volume centrado em "*P*" (malha principal), teremos, lembrando que neste caso não é necessário mais interpolar *u* e *v* pois elas já são analisadas nas faces da malha principal (malhas deslocadas):

$$\left[(\rho u A)_e - (\rho u A)_w\right] - \left[(\rho v A)_n - (\rho v A)_s\right] = 0$$

Substituindo as Eqs. 6.10a e 6.10b na equação acima, teremos, após rearranjos, a equação para a correção da pressão (*P'*):

$$a_P P'_P = a_W P'_W + a_E P'_E + a_S P'_S + a_N P'_N + b'_P \quad \text{Eq. 6.11}$$

Sendo os coeficientes dados por:

$$a_W = \rho_w d_w A_w \; ; \quad a_E = \rho_e d_e A_e$$

$$a_N = \rho_n d_n A_n \; ; \quad a_S = \rho_s d_s A_s$$

$$a_P = a_W + a_E + a_S + a_N ; \; b'_P = \left[\left(\rho u^* A\right)_w - \left(\rho u^* A\right)_e\right] + \left[\left(\rho v^* A\right)_s - \left(\rho v^* A\right)_n\right]$$

Observação 63: Notar que o coeficiente *b'P* representa a continuidade estimada (*) (obtida do campo de velocidades incorreto). Logo, a convergência é atingida quando *b'P* torna-se igual ou menor que o critério de convergência!

Prof. Dyrney Araújo dos Santos

Professor Dyrney Araújo dos Santos
Universidade Federal de Goiás
Engenharia Química
site: www.dyrney.com

6. Acoplamento Pressão x Velocidade

6.5 Solução dos Campos de Velocidade e Pressão

Todas as equações necessárias para o Algoritmo SIMPLE foram aqui obtidas, porém, deve-se utilizar fatores de sub-relaxação a fim de se evitar instabilidades numéricas ou mesmo a divergência durante os cálculos.

- **Sub-relaxação para a pressão: o fator de sub-relaxação para a pressão (α_P) é adicionado na Eq. 6.6a durante a sua correção. Logo:**

$$P = P^* + \alpha_p P' \quad \text{Eq. 6.12}$$

- **Sub-relaxação para as velocidades: neste caso, as velocidades são sub-relaxadas, ou seja, multiplicados por α_v ou α_u, com relação aos valores das velocidades da iteração anterior (k-1), ou seja:**

$$u_e = \alpha_u u_e^k + \left(1-\alpha_u\right) u_e^{(k-1)} \quad \text{Eq. 6.13a} \qquad \text{e} \qquad v_n = \alpha_v v_n^k + \left(1-\alpha_v\right) v_n^{(k-1)} \quad \text{Eq. 6.13b}$$

Observação 64: A sub-relaxação das velocidades irá afetar, também, os valores dos coeficientes da equação para a correção da pressão (*P'*) (Eq. 6.11) por meio dos valores dos "*d*". Logo, os novos valores de "*d*" serão:

$$d_e = \frac{A_e \alpha_u}{a_e} \qquad d_w = \frac{A_w \alpha_u}{a_w} \qquad d_n = \frac{A_n \alpha_v}{a_n} \qquad d_s = \frac{A_s \alpha_v}{a_s} \quad \text{Eq. 6.14}$$

Observação 65: Os valores para os fatores de sub-relaxação no SIMPLE dependem do tipo de problema a ser resolvido.

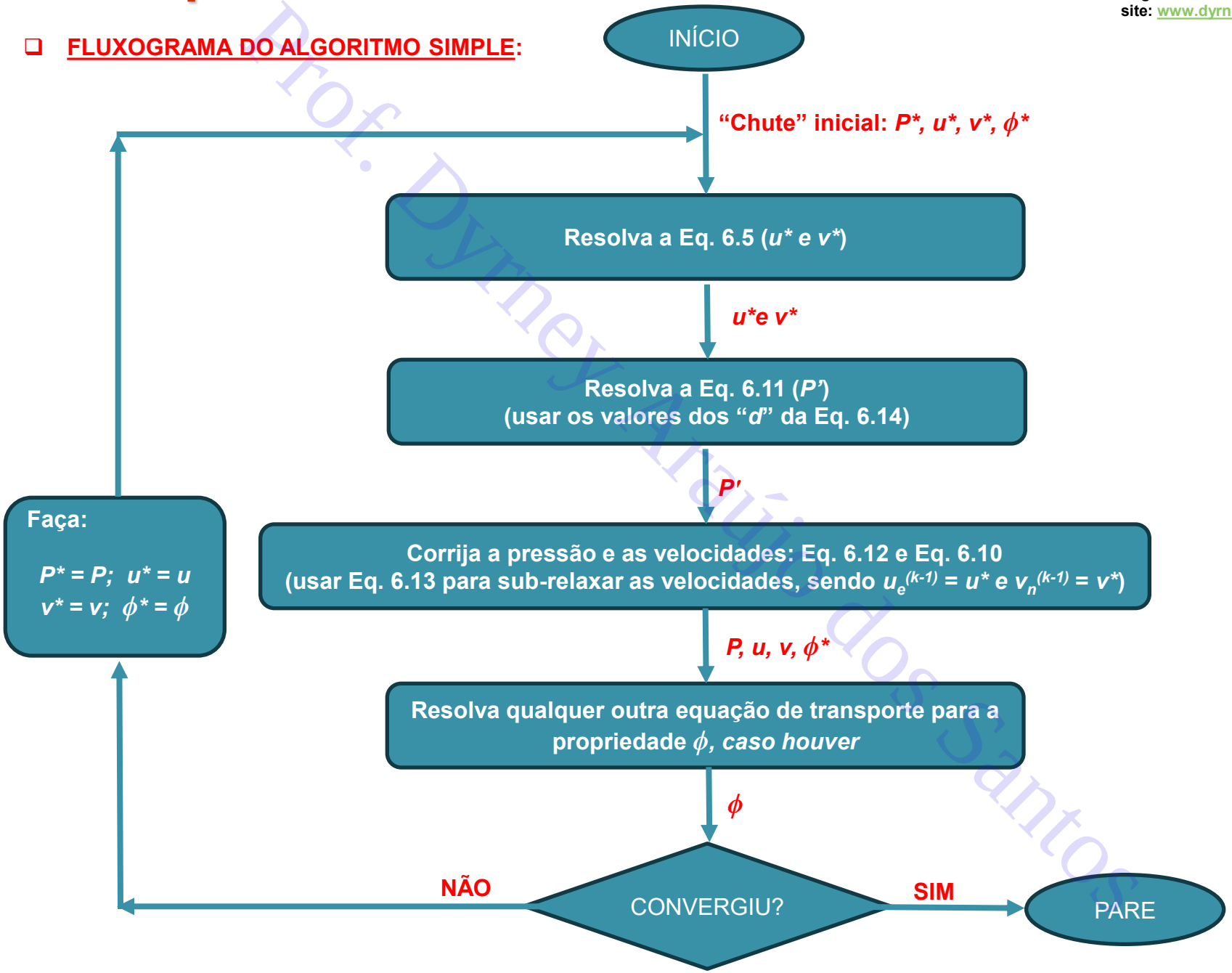
Patankar (1980) sugere α_P = 0,8 e $\alpha_v = \alpha_u$ = 0,5 para muitos tipos de escoamento de fluidos.

Prof. Dyrney Araújo dos Santos

6. Acoplamento Pressão x Velocidade

Professor Dyrney Araújo dos Santos
Universidade Federal de Goiás
Engenharia Química
site: www.dyrney.com

- **FLUXOGRAMA DO ALGORITMO SIMPLE:**



Prof. Dyrney Araújo dos Santos

Professor Dyrney Araújo dos Santos
Universidade Federal de Goiás
Engenharia Química
site: www.dyrney.com

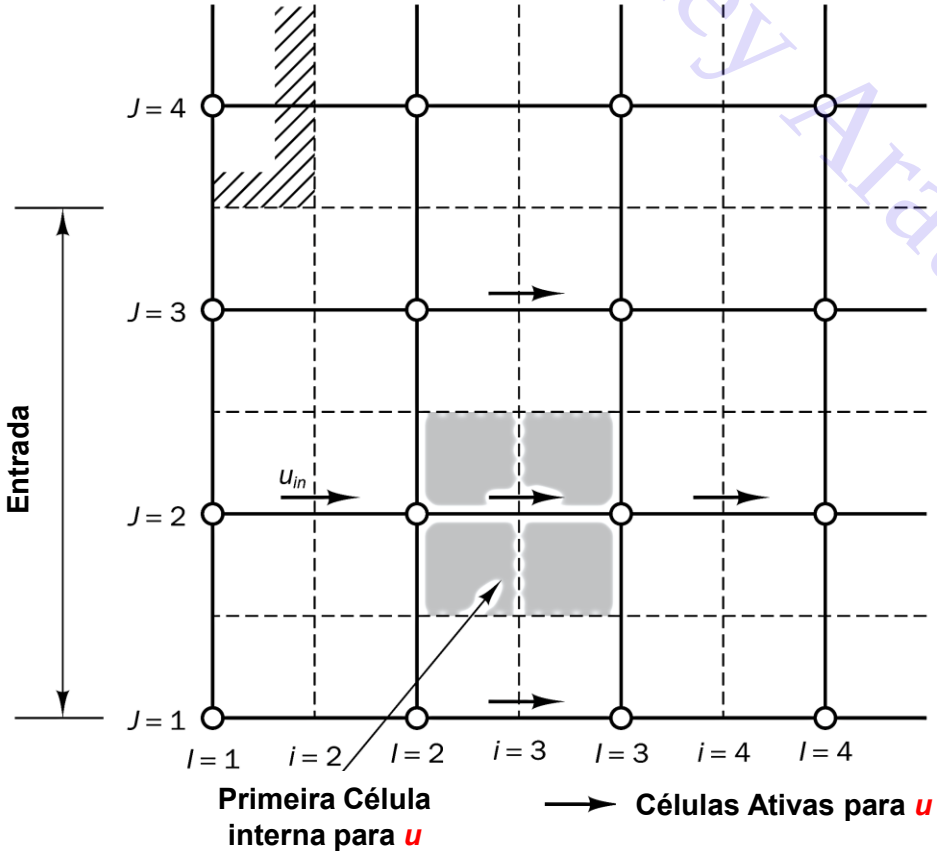
6. Acoplamento Pressão x Velocidade

6.6 Condições de Contorno para a Velocidade e a Pressão

A) Condição de Contorno de Entrada ("*Inlet Boundary Condition*"):

- **Componente da Velocidade em x (*u*)**

Considere, aqui, a entrada perpendicular à direção x, cujo sentido do fluxo mássico é da esquerda para a direita.



Observação 66: Iremos considerar que a malha se estende para fora do contorno físico, sendo estes volumes "extras" utilizados para armazenar os valores dos contornos, neste caso "u_{in}".

Observação 67: Note que para o primeiro volume interno (sombreado) para *u*, todos os seus vizinhos estão "ativos", ou seja, não é necessário modificar a sua equação para introduzir a condição de contorno de entrada (velocidade conhecida)

Prof Dyrney Araújo dos Santos

Professor Dyrney Araújo dos Santos
Universidade Federal de Goiás
Engenharia Química
site: www.dyrney.com

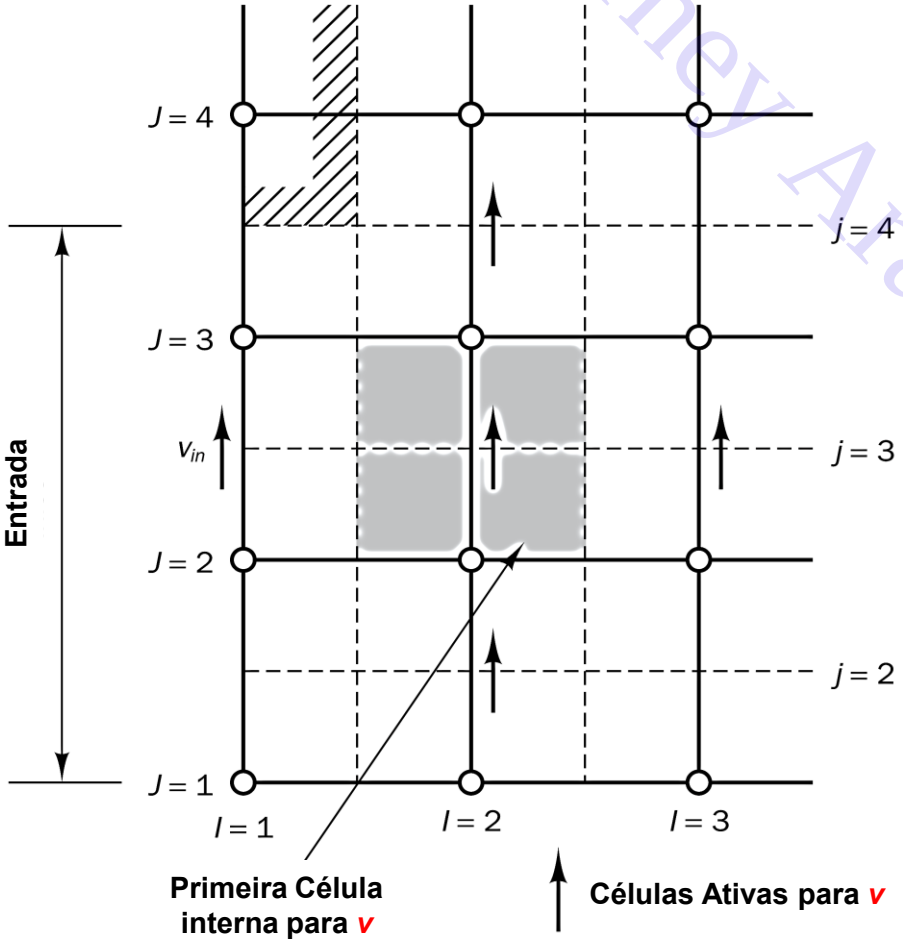
6. Acoplamento Pressão x Velocidade

6.6 Condições de Contorno para a Velocidade e a Pressão

A) Condição de Contorno de Entrada ("*Inlet Boundary Condition*"):

- **Componente da Velocidade em y (*v*)**

Considere, aqui, a entrada perpendicular à direção x, cujo sentido do fluxo mássico é da esquerda para a direita.



Observação 68: Iremos considerar que a malha se estende para fora do contorno físico, sendo estes volumes "extras" utilizados para armazenar os valores dos contornos, neste caso "v_{in}".

Observação 69: Note que para o primeiro volume interno (sombreado) para *v*, todos os seus vizinhos estão "ativos", ou seja, não é necessário modificar a sua equação para introduzir a condição de contorno de entrada (velocidade conhecida)

Prof. Dyrney Araújo dos Santos

Professor Dyrney Araújo dos Santos
Universidade Federal de Goiás
Engenharia Química
site: www.dyrney.com

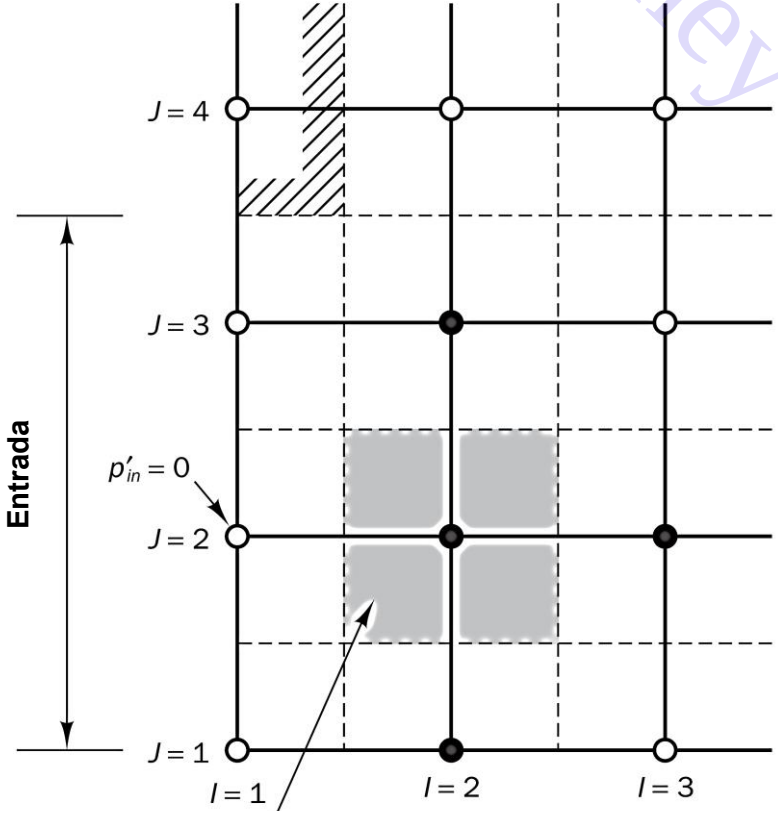
6. Acoplamento Pressão x Velocidade

6.6 Condições de Contorno para a Velocidade e a Pressão

A) Condição de Contorno de Entrada ("*Inlet Boundary Condition*"):

- **Correção para a Pressão (*P'*)**

Considere, aqui, a entrada perpendicular à direção x, cujo sentido do fluxo mássico é da esquerda para a direita.



Observação 70: Iremos considerar que a malha se estende para fora do contorno físico, sendo estes volumes "extras" utilizados para armazenar os valores dos contornos, neste caso "P'_{in}".

Observação 71: Note que o "link" com o vizinho a oeste de *P'* é "cortado" da equação para a correção da pressão (Eq. 6.11) fazendo-se $a_W = 0$.

Visto que a velocidade é conhecida na entrada, também não é necessário corrigir esta velocidade, logo, pode-se fazer $u^*_W = u_{in}$ no termo fonte da Eq. 6.11.

Prof. Dyrney Araújo dos Santos

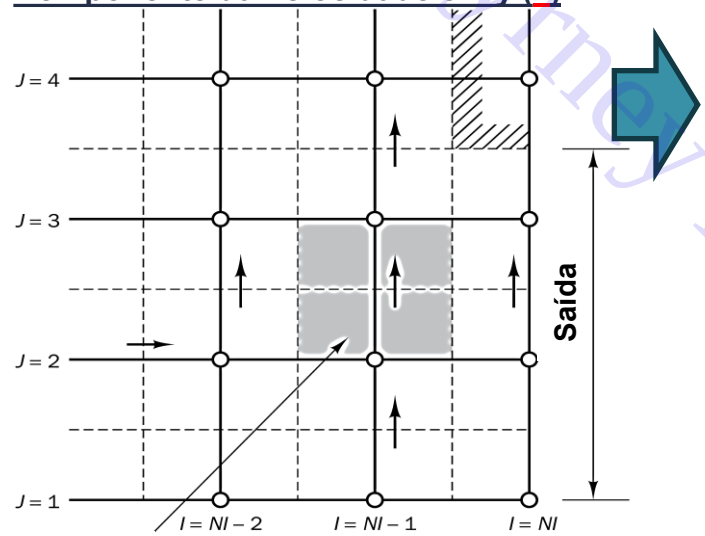
Professor Dyrney Araújo dos Santos
Universidade Federal de Goiás
Engenharia Química
site: www.dyrney.com

6. Acoplamento Pressão x Velocidade

6.6 Condições de Contorno para a Velocidade e a Pressão

B) Condição de Contorno de Saída ("*Outlet Boundary Condition*"): Se o local de saída se encontrar distante da entrada ou de alguma outra perturbação, pode-se considerar um escoamento completamente desenvolvido na saída, ou seja, o gradiente perpendicular à saída é nulo (exceto para a pressão).

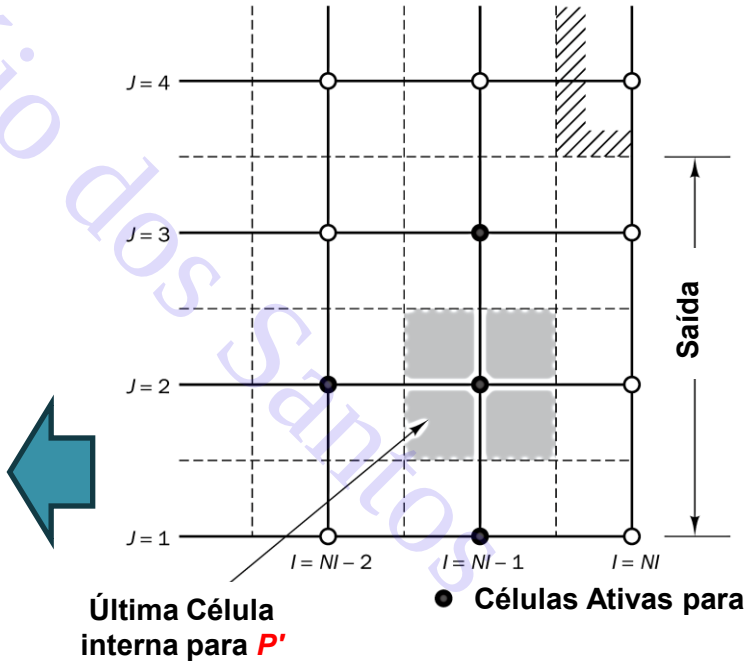
- **Componente da Velocidade em y (*v*)**



Observação 72: Seguindo a notação da malha ao lado, para se ter um gradiente de *v* nulo no contorno da saída, faça:

$$v_{NI,j} = v_{NI-1,j}$$

- **Correção para a Pressão (*P'*)**



Observação 73: Note que o "link" com o vizinho a leste de *P'* é "cortado" da equação para a correção da pressão (Eq. 6.11) fazendo-se $a_E = 0$.

Visto que o gradiente de *u* é nulo na saída (veja o próximo slide), também não é necessário corrigir esta velocidade, logo, pode-se fazer $u^*_E = u_E$ no termo fonte da Eq. 6.11.

Prof. Dyrney Araújo dos Santos

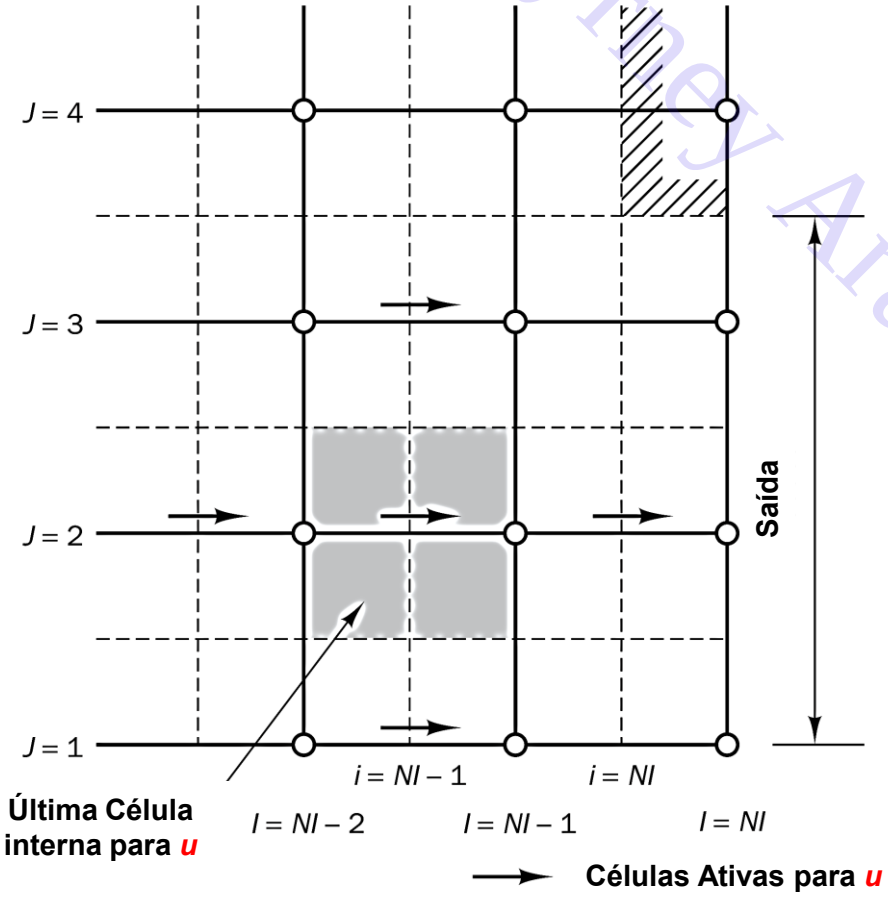
Professor Dyrney Araújo dos Santos
Universidade Federal de Goiás
Engenharia Química
site: www.dyrney.com

6. Acoplamento Pressão x Velocidade

6.6 Condições de Contorno para a Velocidade e a Pressão

B) Condição de Contorno de Saída ("*Outlet Boundary Condition*"):

- **Componente da Velocidade em x (*u*)**



Observação 74: Assumindo um gradiente de *u* nulo no contorno da saída, tem-se (notar que $u_{NI,J} = u_E$ usado na equação para *P'*):

$$u_{NI,J} = u_{NI-1,J}$$

Observação 75: Durante as iterações do SIMPLE, não é garantido que a massa irá se conservar, visto que extrapolamos os valores das velocidades nos contornos da saída.

Para garantir a conservação da massa, primeiro calcule o fluxo total de massa que deixa o domínio ($M_{saída}$), somando todas as velocidades extrapoladas de saída.

Para que o fluxo de saída seja igual ao fluxo total de entrada ($M_{entrada}$), faça a seguinte correção (notar que $u_{NI,J} = u_E$ usado na equação para *P'*):

$$u_{NI,J} = u_{NI-1,J} \times M_{entrada} / M_{saída}$$

Prof Dyrney Araújo dos Santos

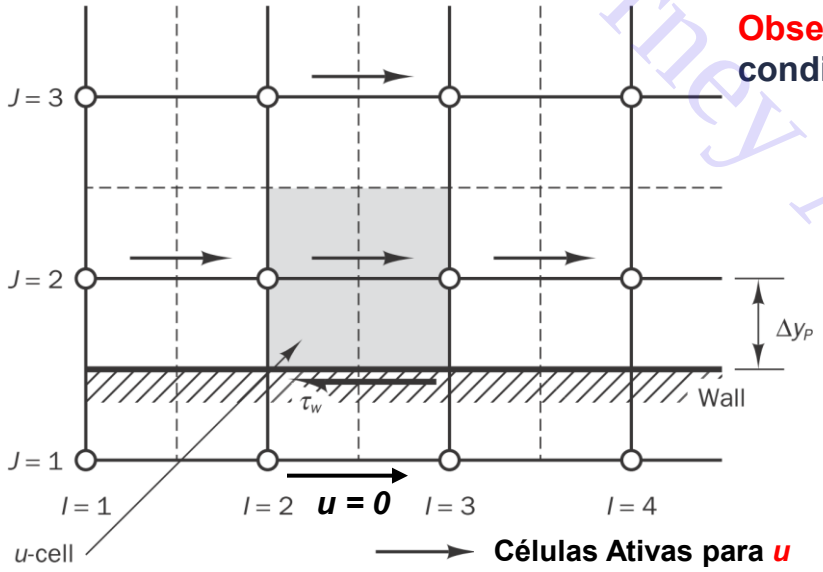
Professor Dyrney Araújo dos Santos
Universidade Federal de Goiás
Engenharia Química
site: www.dyrney.com

6. Acoplamento Pressão x Velocidade

6.6 Condições de Contorno para a Velocidade e a Pressão

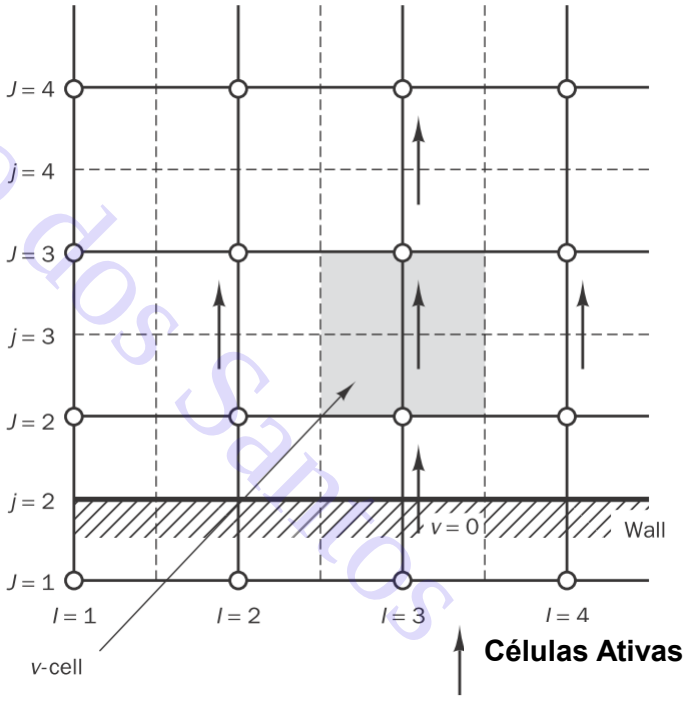
C) Condição de Contorno de Parede ("*Wall Boundary Condition*"): Esta é a condição de contorno mais comum em escoamentos internos.

❑ **Componente da Velocidade em x (*u*)**



Observação 76: Tanto para *u*, quanto para *v*, utiliza-se a condição de não deslizamento no volume do contorno, ou seja, ***u = v = 0***.

❑ **Componente da Velocidade em y (*v*)**



❑ **Correção para a Pressão (*P'*)**

Observação 77: A equação para a correção da pressão é tratada de forma similar às condições anteriores, visto que as velocidades são conhecidas nos contornos.

Por exemplo: na equação da correção da pressão (**Eq. 6.11**), no caso de *v*, faz-se $a_S = 0$ e $v^*_S = v_S$ no termo fonte.

Prof Dyrney Araújo dos Santos

Professor Dyrney Araújo dos Santos
Universidade Federal de Goiás
Engenharia Química
site: www.dyrney.com

Bibliografia

VERSTEEG, H.K.; MALALASEKERA, W. An Introduction to Computational Fluid Dynamics: The Finite Volume Method, 2nd ed. Pearson Education Ltd.: Harlow, UK,2007.

MALISKA, C.R. Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional, Livros Técnicos e Científicos Editora S/A, 2ª Edição Revista e Ampliada, 2004.

PATANKAR, S.V. Numerical Heat Transfer and Fluid Flow, Hemisphere Publishing Corporation, Taylor & Francis Group. New York, 1980.

Prof. Dyrney Araújo dos Santos