ENGENHARIA QUÍMICA
Universidade Federal de Goiás

Equações de Transporte e a sua Forma Geral para uso em CFD

Professor Dyrney Araújo dos Santos
Universidade Federal de Goiás
Engenharia Química
Disciplina: Introdução à Fluidodinâmica Computacional
site: www.dyrney.com

Prof. Dyrney Araújo dos Santos

Professor Dyrney Araújo dos Santos
Universidade Federal de Goiás
Engenharia Química
site: www.dyrney.com

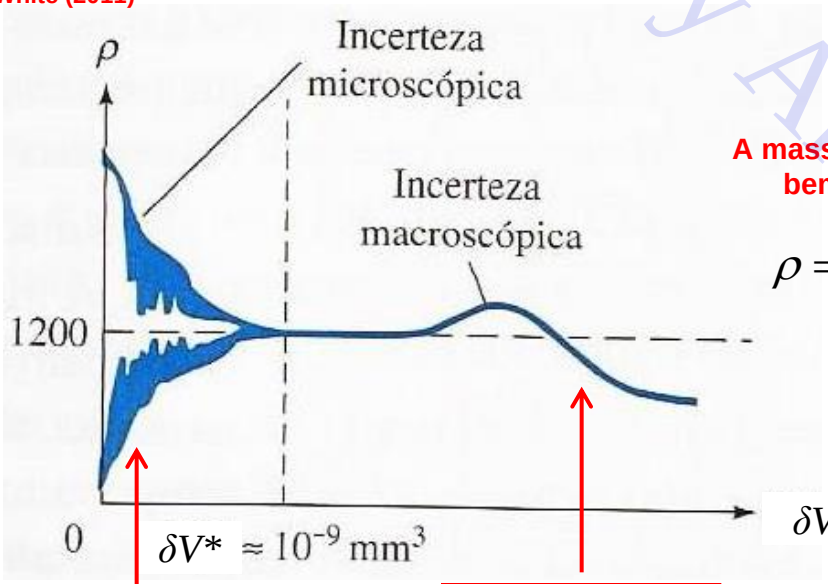
2. Equações de Transporte

2.1 O Conceito de Partícula e Elemento de Fluido

O Fluido como um meio Contínuo

Hipótese do Contínuo: Apesar de um fluido ser composto por moléculas que podem estar bem espaçadas, considera-se que qualquer propriedade do fluido (densidade, etc.) varia continuamente no espaço sem saltos de descontinuidade. Logo, o fluido é tratado não a nível molecular mas a nível de partícula ou elemento de fluido, onde neste pequeno volume composto por várias moléculas, o fluido preserva todas as características físicas do material.

Fonte: White (2011)

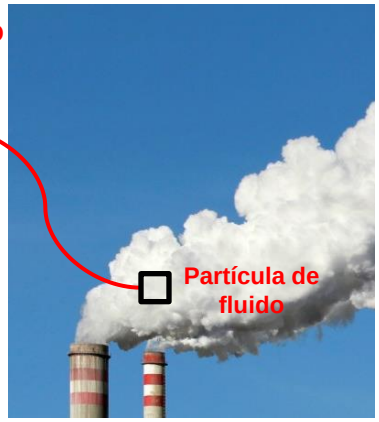


Variações moleculares tornam-se importantes

Variações de agregações tornam-se importantes

Ordem de grandeza de uma partícula ou elemento de fluido

$$\delta V^* \approx 10^{-9}\ mm^3$$



A massa específica é mais bem definida como

$$\rho = \lim_{\delta V \to \delta V^*} \frac{\delta m}{\delta V}$$

OBS.: 1 mol de um gás (T = 0ºC e P = 1atm) ocupa 22,4 L e contem $6x10^{23}$ moléculas.

1 partícula de fluído (gás), nas mesmas condições, possui $2,68x10^{7}$ moléculas

Logo, o conceito de contínuo pela média das moléculas é justificado pelo grande número de moléculas

Meio Contínuo: a variação de suas propriedades é tão suave que o cálculo diferencial pode ser usado para analisar a substância.

Prof. Dyrney Araújo dos Santos

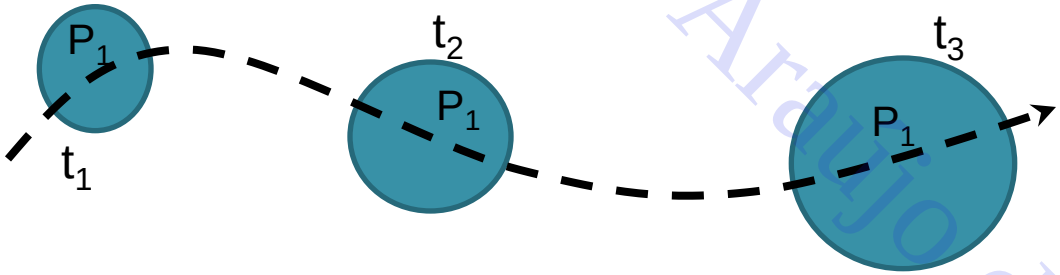
Professor Dyrney Araújo dos Santos
Universidade Federal de Goiás
Engenharia Química
site: www.dyrney.com

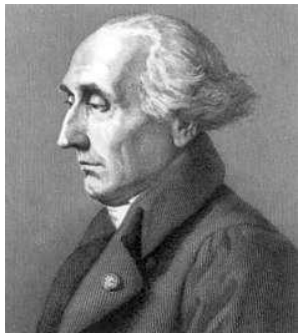
2. Equações de Transporte

2.2 Ponto de Vista Lagrangeano e Euleriano

Há dois pontos de vista diferentes na abordagem diferencial

Método Lagrangeano: Consiste em identificar um determinado sistema de identidade fixa (não permite a entrada ou saída de massa), como por exemplo uma partícula de fluido, e, a partir daí, observar variações de propriedades tais como posição, temperatura, velocidade, etc. à medida que este sistema se desloca no espaço com o passar do tempo.





Joseph-Louis Lagrange
(Giuseppe Lodovico Lagrangia)
(1736 – 1813)
(Físico, matemático e astrônomo italiano)

Este método envolve acompanhar o vetor posição e o vetor velocidade de cada sistema como funções do tempo.

Este método é normalmente utilizado no estudo da mecânica dos sólidos e é inviável de ser aplicado no estudo de escoamento de fluidos ("elevado número de partículas de fluido"). Possui um alto custo computacional a depender do número de partículas presentes no domínio de cálculo.

Prof Dyrney Araújo dos Santos

Professor Dyrney Araújo dos Santos
Universidade Federal de Goiás
Engenharia Química
site: www.dyrney.com

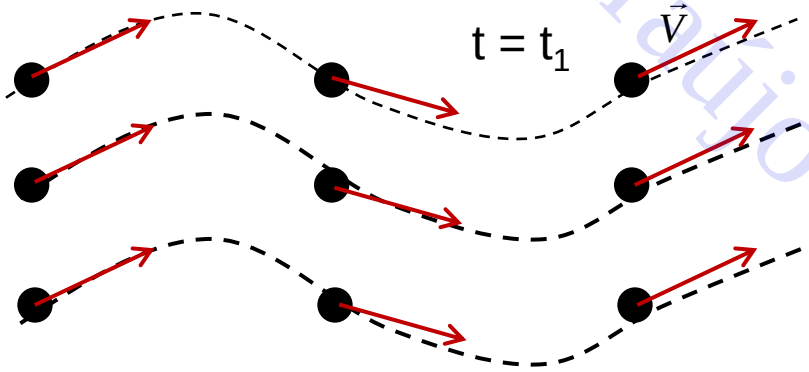
2. Equações de Transporte

2.2 Ponto de Vista Lagrangeano e Euleriano

Há dois pontos de vista diferentes na abordagem diferencial

Método Euleriano: Consiste em se observar o comportamento transiente de uma determinada propriedade do escoamento (Ex.: temperatura, velocidade, concentração etc.) em posições fixas no espaço. Neste caso falamos de "elemento de fluido" (pode-se pensar em um pequeno volume de controle), o qual permite a entrada e saída de massa. Obtém-se, assim, uma "visão" do comportamento do movimento naquela região do espaço e naquele instante de tempo.

Ex.: Valores de velocidade em "pontos fixos no espaço (elementos de fluido)" em um determinado instante de tempo (t_1), ou seja, o campo de velocidade V (x,y,z,t)



Leonhard Paul Euler
(1707 – 1783)
(Físico, matemático e astrônomo suíço)

Ao invés de acompanhar uma partícula de fluido individual, define-se variáveis de campo (campo de pressão, de velocidade, etc.), funções do espaço e do tempo, dentro do volume de controle infinitesimal ou elemento de fluido. A variável de campo em um determinado local e em um determinado instante de tempo é o valor da variável para qualquer partícula de fluido que ocupar essa posição neste determinado instante.

É a descrição mais conveniente para aplicações em CFD.

Prof. Dyrney Araújo dos Santos

Professor Dyrney Araújo dos Santos
Universidade Federal de Goiás
Engenharia Química
site: www.dyrney.com

2. Equações de Transporte

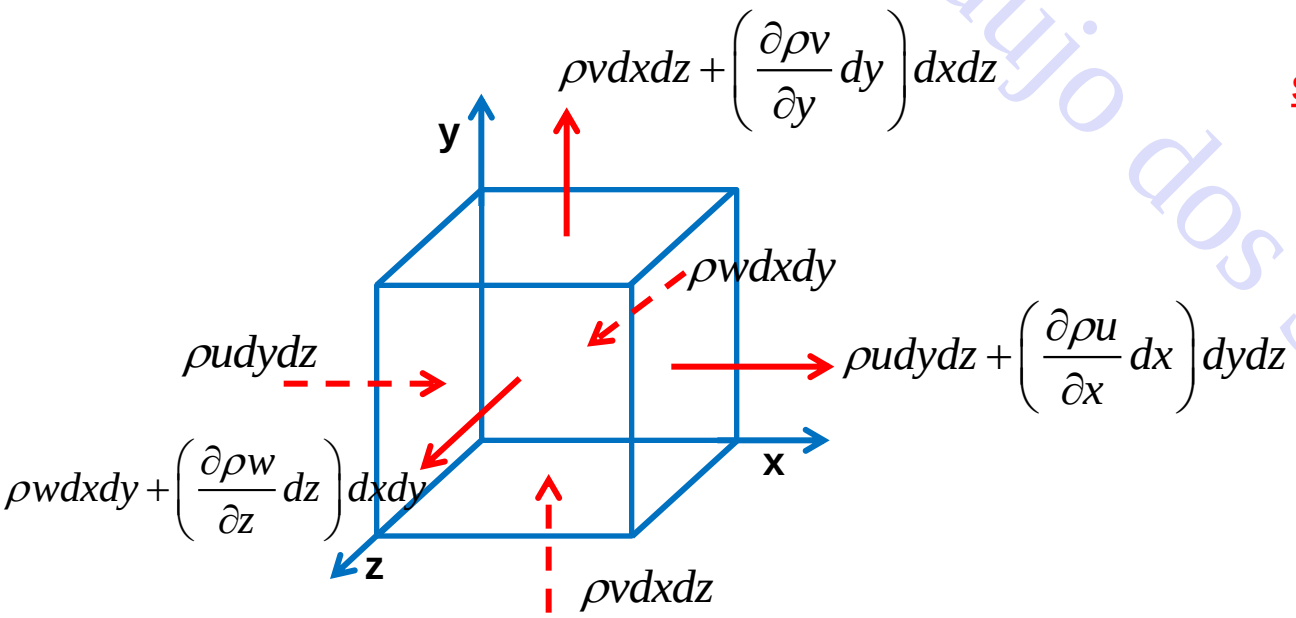
2.3 Equação da Conservação de Massa ou Equação da Continuidade

A equação da conservação de massa ou equação da continuidade pode ser obtida através de um balanço de massa num elemento de fluido.

Da lei de conservação da massa, tem-se:

Taxa mássica acumulada [MT^{-1}] = Taxa mássica que entra [MT^{-1}] – Taxa mássica que sai [MT^{-1}]

Análise dos termos de entrada e saída: considere as taxas de massa que transpassam as faces de um elemento de fluido (aproximação Euleriana) em um plano cartesiano. O volume do elemento abaixo é dado por dxdydz



Sendo o vetor velocidade dado por:

$$\vec{V} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$$

Prof. Dyrney Araújo dos Santos

Professor Dyrney Araújo dos Santos
Universidade Federal de Goiás
Engenharia Química
site: www.dyrney.com

2. Equações de Transporte

2.3 Equação da Conservação de Massa ou Equação da Continuidade

Análise do temo de acúmulo: a taxa de variação infinitesimal da massa no interior do elemento de fluido pode ser definido como

$$\text{Taxa de acúmulo de massa} = \frac{\partial \rho}{\partial t} dxdydz$$

Finalmente, retornando à equação do balanço de massa no elemento de fluido, tem-se:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dxdydz = \rho u dydz + \rho v dxdz + \rho w dxdy - \left(\rho u dydz + \frac{\partial \rho u}{\partial x} dxdydz \right)$$

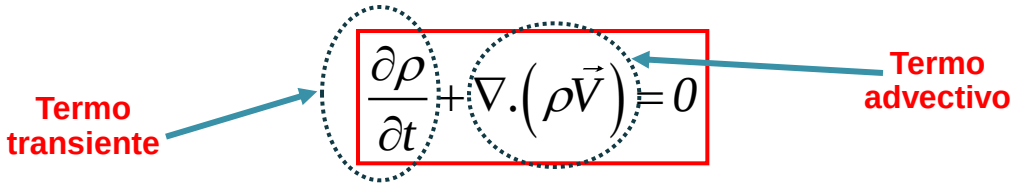
$$- \left(\rho v dxdz + \frac{\partial \rho v}{\partial y} dydxdz \right) - \left(\rho w dxdy + \frac{\partial \rho w}{\partial z} dzdxdy \right)$$

Após simplificações e dividindo tudo pelo volume infinitesimal dxdydz, tem-se:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0$$

A equação de conservação da massa para um elemento de fluido é conhecida como Equação da Continuidade.

Desta forma a equação da continuidade pode, também, ser escrita em uma forma compacta usando o operador nabla



Prof. Dyrney Araújo dos Santos

Professor Dyrney Araújo dos Santos
Universidade Federal de Goiás
Engenharia Química
site: www.dyrney.com

2. Equações de Transporte

2.3 Equação da Conservação de Massa ou Equação da Continuidade

Observação 10: **Para um escoamento incompressível, ou seja, em que o número adimensional de Mach é menor do que 0,3 (Ma < 0,3), o divergente do campo de velocidade é nulo, conforme a seguir:**

$$\nabla.\left(\vec{V}\right)=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$$

2.4 Taxa de variação seguindo uma partícula de fluido e para um elemento de fluido

Observação 11: **As equações da quantidade de movimento linear (2ª Lei de Newton) e da energia (1ª Lei da Termodinâmica) são leis baseadas em mudanças sofridas por um sistema, ou seja, uma partícula de fluido, em que não é permitida a entrada ou a saída de massa. Desta forma, como a análise em CFD se baseia em um campo Euleriano, devemos encontrar uma relação entre uma partícula de fluido (aproximação Lagrangeana) e um elemento de fluido (aproximação Euleriana)**

Considere uma propriedade qualquer, por unidade de massa, "ϕ" de uma partícula de fluido que varia com a posição (x, y, z) e com o tempo (t)

$$\phi=\phi(x,y,z,t)$$

Prof. Dyrney Araújo dos Santos

Professor Dyrney Araújo dos Santos
Universidade Federal de Goiás
Engenharia Química
site: www.dyrney.com

2. Equações de Transporte

2.4 Taxa de variação seguindo uma partícula de fluido e para um elemento de fluido

Visto que "ϕ" é uma função de quatro variáveis independentes (x, y, z, t), para encontrar a variação total de "ϕ" com o tempo seguindo uma partícula de fluido, deve-se aplicar a regra da cadeia, pois: "ϕ" pode variar com x e x pode variar com t; "ϕ" pode variar com y e y pode variar com t; e assim sucessivamente. Logo, tem-se:

$$\frac{D\phi(x,y,z,t)}{Dt} = \frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

Esta derivada total é denominada de derivada substantiva ou derivada material e iremos representar por D/Dt

Visto que a partícula de fluido segue o escoamento, tem-se que dx/dt é o componente da velocidade local u, dy/dt = v e dz/dt = w. Substituindo, tem-se:

$$\frac{D\phi(x,y,z,t)}{Dt} = \frac{\partial\phi}{\partial t} + u\frac{\partial\phi}{\partial x} + v\frac{\partial\phi}{\partial y} + w\frac{\partial\phi}{\partial z} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{D\phi}{Dt} = \frac{\partial\phi}{\partial t} + \vec{V}.\nabla\phi}$$

Como na equação da continuidade, estamos interessados no desenvolvimento da taxa de variação (acúmulo) da propriedade "ϕ" por unidade de volume, neste caso, de partícula de fluido. Logo, tem-se:

$$\boxed{\rho\frac{D\phi}{Dt} = \rho\left(\frac{\partial\phi}{\partial t} + \vec{V}.\nabla\phi\right)}$$

Prof. Dyrney Araújo dos Santos

Professor Dyrney Araújo dos Santos
Universidade Federal de Goiás
Engenharia Química
site: www.dyrney.com

2. Equações de Transporte

2.4 Taxa de variação seguindo uma partícula de fluido e para um elemento de fluido

Observação 12: Iremos agora desenvolver uma relação entre a taxa de variação da propriedade "ϕ" para uma partícula de fluido e aquela para um elemento de fluido. Desta forma, poderemos deduzir a equação da quantidade de movimento linear e da energia, "originalmente" definidas para uma partícula de fluido, para um elemento de fluido (aplicável nas técnicas de CFD).

Vimos que a soma da taxa de variação da massa, por unidade de volume, (termo transiente) e da taxa líquida de massa, por unidade de volume, para dentro de um elemento de fluido (termo advectivo) é dada por:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla . \left(\rho \vec{V} \right)$$

A forma generalizada destes termos para uma propriedade "ϕ" arbitrária, por unidade de massa, é :

$$\frac{\partial \left(\rho \phi \right)}{\partial t} + \nabla . \left(\rho \vec{V} \phi \right)$$

Desenvolvendo a equação acima, com base na regra da cadeia, e rearranjando, tem-se:

$$\frac{\partial \left(\rho \phi \right)}{\partial t} + \nabla . \left(\rho \vec{V} \phi \right) = \rho \left[\frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{V} . \nabla \phi \right] + \phi \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla . \left(\rho \vec{V} \right) \right]$$

Este termo deve-se anular (Equação da continuidade)

Prof. Dyrney Araújo dos Santos

Professor Dyrney Araújo dos Santos
Universidade Federal de Goiás
Engenharia Química
site: www.dyrney.com

2. Equações de Transporte

2.4 Taxa de variação seguindo uma partícula de fluido e para um elemento de fluido

Finalmente temos a relação desejada :

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t}+\nabla.(\rho\vec{V}\phi)=\rho\left[\frac{\partial\phi}{\partial t}+\vec{V}.\nabla\phi\right]=\rho\frac{D\phi}{Dt}$$

Em outras palavras:

Taxa de variação de "ϕ" em um elemento de fluido + Taxa líquida de escoamento de "ϕ" para dentro do elemento de fluido = Taxa de variação de "ϕ" em uma partícula de fluido

2.5 Equação da Quantidade de Movimento Linear

A 2ª Lei de Newton afirma que:

Resultante de Forças sobre uma Partícula de Fluido = Taxa de Variação de Quantidade de Movimento

$$\sum\vec{F}=\frac{D(m\vec{V})}{Dt}$$ **Pela regra da cadeia, tem-se:** $$\sum\vec{F}=m\frac{D\vec{V}}{Dt}+\vec{V}\frac{Dm}{Dt}$$

Visto que a massa total sempre se conserva (exceto em reações atômicas) e dividindo pelo volume da partícula de fluido

$$\frac{\sum\vec{F}}{dxdydz}=\rho\frac{D\vec{V}}{Dt}$$

Observação 13: **A taxa de variação está aqui escrita para uma partícula de fluido. No entanto, utilizando a relação desenvolvida anteriormente, podemos convertê-la para um elemento de fluido (utilizado em CFD).**

Prof. Dyrney Araújo dos Santos

Professor Dyrney Araújo dos Santos
Universidade Federal de Goiás
Engenharia Química
site: www.dyrney.com

2. Equações de Transporte

2.5 Equação da Quantidade de Movimento Linear

Visto que "ϕ" é uma propriedade por unidade de massa e quantidade de movimento é "massa×velocidade", tem-se as seguintes conversões para as três dimensões espaciais

Direção espacial	ϕ	Taxa de variação, por unidade de volume, para uma partícula de fluido	Taxa de variação, por unidade de volume, para um elemento de fluido
x	u	$\rho\frac{Du}{Dt}=\rho\left[\frac{\partial u}{\partial t}+\vec{V}.\nabla u\right]$	$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t}+\nabla.\left(\rho\vec{V}u\right)$
y	v	$\rho\frac{Dv}{Dt}=\rho\left[\frac{\partial v}{\partial t}+\vec{V}.\nabla v\right]$	$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t}+\nabla.\left(\rho\vec{V}v\right)$
z	w	$\rho\frac{Dw}{Dt}=\rho\left[\frac{\partial w}{\partial t}+\vec{V}.\nabla w\right]$	$\frac{\partial(\rho w)}{\partial t}+\nabla.\left(\rho\vec{V}w\right)$

Observação 14: **A taxa de variação escrita para uma partícula de fluido é também conhecida como "forma não conservativa" (não preserva diretamente as grandezas conservadas em um volume de controle) da taxa de variação, enquanto que a taxa de variação escrita para um elemento de fluido é conhecida como "forma conservativa ou forma divergente" (preserva as grandezas conservadas em um volume de controle) da taxa de variação.**

Prof. Dyrney Araújo dos Santos

Professor Dyrney Araújo dos Santos
Universidade Federal de Goiás
Engenharia Química
site: www.dyrney.com

2. Equações de Transporte

2.5 Equação da Quantidade de Movimento Linear

Logo, por enquanto, a 2ª Lei de Newton aplicada a um elemento de fluido, por unidade de volume do elemento de fluido (dxdydz), é:

$$\frac{\sum \vec{F}}{dxdydz} = \frac{\partial\left(\rho\vec{V}\right)}{\partial t} + \nabla.\left(\rho\vec{V}\otimes\vec{V}\right)$$

O símbolo ⊗ denota o produto tensorial (ou produto diádico) entre dois vetores para formar um tensor.

Ex: sejam dois vetores a e b, logo, $\vec{a}\otimes\vec{b} = \begin{pmatrix} a_x b_x & a_x b_y & a_x b_z \\ a_y b_x & a_y b_y & a_y b_z \\ a_z b_x & a_z b_y & a_z b_z \end{pmatrix}$

Logo, no caso da Equação do movimento, teremos

$$\rho\vec{V}\otimes\vec{V} = \begin{pmatrix} \rho u^2 & \rho uv & \rho uw \\ \rho vu & \rho v^2 & \rho vw \\ \rho wu & \rho wv & \rho w^2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \nabla.\left(\rho\vec{V}\otimes\vec{V}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}. \begin{pmatrix} \rho u^2 & \rho uv & \rho uw \\ \rho vu & \rho v^2 & \rho vw \\ \rho wu & \rho wv & \rho w^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \rho u^2}{\partial x} + \frac{\partial \rho vu}{\partial y} + \frac{\partial \rho wu}{\partial z} \\ \frac{\partial \rho uv}{\partial x} + \frac{\partial \rho v^2}{\partial y} + \frac{\partial \rho wv}{\partial z} \\ \frac{\partial \rho uw}{\partial x} + \frac{\partial \rho vw}{\partial y} + \frac{\partial \rho w^2}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Interpretação física dos termos advectivos

$\frac{\partial \rho u^2}{\partial x}$ **Transporte de momento na direção x devido ao movimento na direção x**

$\frac{\partial \rho vu}{\partial y}$ **Transporte de momento na direção x devido ao movimento na direção y**

Os demais termos são interpretados de forma similar

Prof. Dyrney Araújo dos Santos

Professor Dyrney Araújo dos Santos
Universidade Federal de Goiás
Engenharia Química
site: www.dyrney.com

2. Equações de Transporte

2.5 Equação da Quantidade de Movimento Linear

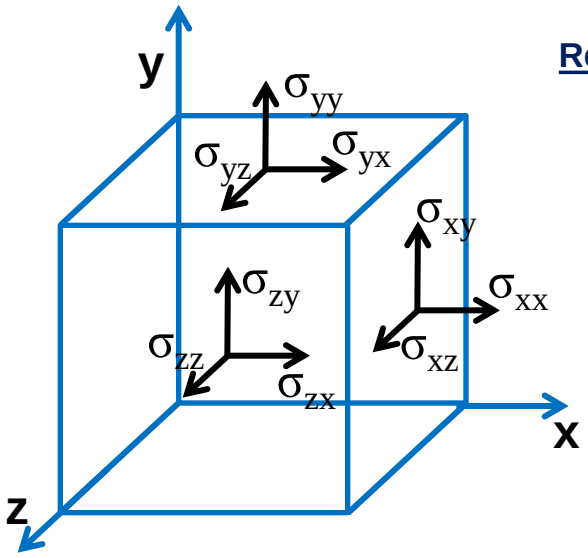
Forças atuando sobre uma Partícula de Fluido em Movimento

Forças de Campo: são forças decorrentes de campos externos (gravidade, magnetismo, potencial elétrico, força de Coriolis, força centrifuga etc.) que agem sobre toda a massa dentro do elemento.

Forças de Superfície: decorrem das tensões sobre os lados da superfície de controle (pressão, tensões viscosas etc.).

A) Forças de Superfície:

As forças de superfície podem ser vistas como a soma da pressão (P) e das tensões viscosas (τ_{ij}) que surgem do movimento do fluido (devido aos gradientes de velocidade), compondo, assim, o tensor tensão total (σ_{ij}):



Representação do tensor total (σ_{ij}) que age sobre uma partícula de fluido

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -P & 0 & 0 \\ 0 & -P & 0 \\ 0 & 0 & -P \end{pmatrix}$$

Observação 15: visto que a pressão é uma tensão normal e que age sempre para "dentro", suas componentes aparecem apenas na diagonal principal do tensor tensão total e negativas.

Prof. Dyrney Araújo dos Santos

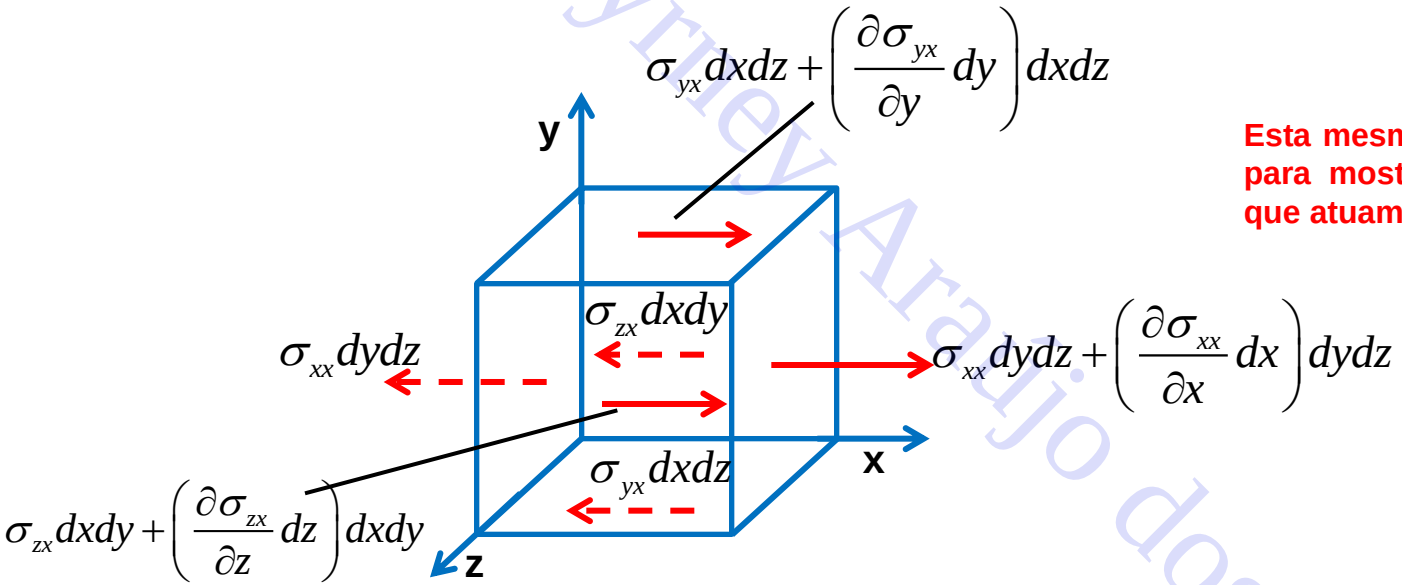
Professor Dyrney Araújo dos Santos
Universidade Federal de Goiás
Engenharia Química
site: www.dyrney.com

2. Equações de Transporte

2.5 Equação da Quantidade de Movimento Linear

Não são estas tensões isoladas, mas suas resultantes, que causa uma força líquida sobre a superfície de controle infinitesimal.

Exemplo: Realizando o balanço de forças superficiais na direção x, tem-se:



Esta mesma análise pode ser feita para mostrar as tensões líquidas que atuam nas direções y e z.

Logo, a força de superfície líquida na direção x é dada por:

$$dF_{sup,x} = \left(\sigma_{xx}dydz + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}dxdydz\right) - \sigma_{xx}dydz + \left(\sigma_{yx}dxdz + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y}dydxdz\right) - \sigma_{yx}dxdz +$$

$$+\left(\sigma_{zx}dxdy + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z}dzdxdy\right) - \sigma_{zx}dxdy$$

Prof. Dyrney Araújo dos Santos

Professor Dyrney Araújo dos Santos
Universidade Federal de Goiás
Engenharia Química
site: www.dyrney.com

2. Equações de Transporte

2.5 Equação da Quantidade de Movimento Linear

Após simplificações e dividindo tudo pelo volume infinitesimal dxdydz, tem-se:

$$\frac{dF_{sup,x}}{dxdydz} = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z}$$

Separando o tensor total (σ_{ij}) em pressão (P) e tensões viscosas (τ_{ij}), tem-se:

$$\frac{dF_{sup,x}}{dxdydz} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}$$

nas direções y e z tem-se, de forma análoga

$$\frac{dF_{sup,y}}{dxdydz} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}$$

$$\frac{dF_{sup,z}}{dxdydz} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}$$

Na forma vetorial, o vetor força superficial "líquida" se torna:

$$\frac{d\vec{F}_{sup}}{dxdydz} = -\nabla p + \nabla . \tau_{ij}$$

sendo:

$$\tau_{ij} = \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right) \vec{k}$$

Prof. Dyrney Araújo dos Santos

Professor Dyrney Araújo dos Santos
Universidade Federal de Goiás
Engenharia Química
site: www.dyrney.com

2. Equações de Transporte

2.5 Equação da Quantidade de Movimento Linear

B) Forças de Campo:

É comum, no equacionamento para aplicação em Fluidodinâmica Computacional (CFD), incluir a contribuição das forças de campo (gravitacional, magnética, potencial elétrica, força de Coriolis, força centrifuga etc.) em um termo fonte (S_M; sendo que "S" vem de "source" (fonte, em português) e "M" de momento).

Exemplo: A modelagem da resultante de força gravitacional, no caso da direção vertical sendo "z" positiva para cima, pode ser representada conforme abaixo, lembrando que todos os termos da equação são por unidade de volume:

$$S_{Mx} = 0;\ S_{My} = 0;\ S_{Mz} = -\rho g$$

Finalmente, substituindo as forças de campo e de superfície na 2ª Lei de Newton, tem-se a Equação da Transferência de Quantidade de Movimento Linear ou a Equação de Cauchy na sua forma conservativa:

$$\frac{\partial\left(\rho\vec{V}\right)}{\partial t} + \nabla.\left(\rho\vec{V}\otimes\vec{V}\right) = -\nabla p + \nabla.\tau_{ij} + S_M$$

direção x:
$$\frac{\partial\rho u}{\partial t} + \frac{\partial\rho u^2}{\partial x} + \frac{\partial\rho vu}{\partial y} + \frac{\partial\rho wu}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z} + S_{Mx}$$

direção y:
$$\frac{\partial\rho v}{\partial t} + \frac{\partial\rho uv}{\partial x} + \frac{\partial\rho v^2}{\partial y} + \frac{\partial\rho wv}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z} + S_{My}$$

direção z:
$$\frac{\partial\rho w}{\partial t} + \frac{\partial\rho uw}{\partial x} + \frac{\partial\rho vw}{\partial y} + \frac{\partial\rho w^2}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zz}}{\partial z} + S_{Mz}$$

Augustin-Louis Cauchy
(1789 – 1857)
(Físico, matemático e engenheiro francês)

Prof. Dyrney Araújo dos Santos

Professor Dyrney Araújo dos Santos
Universidade Federal de Goiás
Engenharia Química
site: www.dyrney.com

2. Equações de Transporte

2.5 Equação da Quantidade de Movimento Linear

DILEMA: Observa-se que existem, a princípio, **14 incógnitas** (u, v, w, ρ, P, τ_{xx}, τ_{xy}, τ_{xz}, τ_{xy}, τ_{yx}, τ_{yz}, τ_{zz}, τ_{zx} e τ_{zy}).
Com relação ao número de equações, poderíamos, a princípio, considerar: **4 equações fundamentais** (equação da continuidade e três equações de transferência de quantidade de movimento) e **1 equação constitutiva** (equação de estado termodinâmica relacionando ρ com P, para escoamentos compressíveis).

Neste caso, para que o problema tenha solução, necessita-se de
9 EQUAÇÕES ADICIONAIS relacionadas às tensões viscosas!

Como modelar ou relacionar as tensões viscosas que agem sobre um elemento de fluido com o campo de velocidades?

2.6 Equações de Navier-Stokes

Navier-Stokes estenderam a lei de newton (fluidos newtonianos) para as três direções espaciais, levando em consideração as deformações normais e de cisalhamento lineares e a deformação volumétrica, como seguem:

Tensões cisalhantes:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

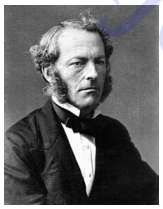
$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)$$

Tensões normais:

$$\tau_{xx} = 2\mu\frac{\partial u}{\partial x} + \lambda\nabla.\vec{V}$$

$$\tau_{yy} = 2\mu\frac{\partial v}{\partial y} + \lambda\nabla.\vec{V}$$

$$\tau_{zz} = 2\mu\frac{\partial w}{\partial z} + \lambda\nabla.\vec{V}$$



Sir George Stokes (1819 – 1903)
(Matemático e físico irlandês)

Claude-Louis Navier (1785 – 1836)
(Matemático, engenheiro e físico francês)

Observa-se que o tensor viscoso, dado pela lei de Navier-Stokes, é simétrico, ou seja,

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$
$$\tau_{xz} = \tau_{zx}$$
$$\tau_{yz} = \tau_{zy}$$

Sendo:

μ: a viscosidade dinâmica, relativa às deformações lineares normais e cisalhantes

λ: o segundo coeficiente de viscosidade, relativo às deformações volumétricas

Para gases: $\lambda = -\frac{2}{3}\mu$

Prof. Dyrney Araújo dos Santos

Professor Dyrney Araújo dos Santos
Universidade Federal de Goiás
Engenharia Química
site: www.dyrney.com

2. Equações de Transporte

2.6 Equações de Navier-Stokes

Substituindo as componentes do tensor viscoso na Equação de Cauchy, teremos as Equações de Navier-Stokes na sua forma conservativa:

Componente na direção x:

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t}+\frac{\partial \rho u^2}{\partial x}+\frac{\partial \rho v u}{\partial y}+\frac{\partial \rho w u}{\partial z}=-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left[2\mu\frac{\partial u}{\partial x}+\lambda\nabla.\vec{V}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right]+S_{Mx}$$

Componente na direção y:

$$\frac{\partial \rho v}{\partial t}+\frac{\partial \rho u v}{\partial x}+\frac{\partial \rho v^2}{\partial y}+\frac{\partial \rho w v}{\partial z}=-\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[2\mu\frac{\partial v}{\partial y}+\lambda\nabla.\vec{V}\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right]+S_{My}$$

Componente na direção z:

$$\frac{\partial \rho w}{\partial t}+\frac{\partial \rho u w}{\partial x}+\frac{\partial \rho v w}{\partial y}+\frac{\partial \rho w^2}{\partial z}=-\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[2\mu\frac{\partial w}{\partial z}+\lambda\nabla.\vec{V}\right]+S_{Mz}$$

Observação 16: **Estas equações são válidas para escoamentos gerais, tais como, escoamento compressível, transiente, viscosidade variável, escoamento tridimensional etc. A sua única restrição é que são aplicadas APENAS PARA FLUIDOS NEWTONIANOS.**

Prof. Dyrney Araújo dos Santos

Professor Dyrney Araújo dos Santos
Universidade Federal de Goiás
Engenharia Química
site: www.dyrney.com

2. Equações de Transporte

2.6 Equações de Navier-Stokes

SIMPLIFICAÇÃO: considerando a viscosidade constante e o escoamento incompressível (Ma < 0,3), as equações anteriores, para um fluido newtoniano, tornam-se:

Componente na direção x:

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t}+\frac{\partial \rho u^2}{\partial x}+\frac{\partial \rho v u}{\partial y}+\frac{\partial \rho w u}{\partial z}=-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+S_{Mx}$$

Componente na direção y:

$$\frac{\partial \rho v}{\partial t}+\frac{\partial \rho u v}{\partial x}+\frac{\partial \rho v^2}{\partial y}+\frac{\partial \rho w v}{\partial z}=-\frac{\partial p}{\partial y}+\mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)+S_{My}$$

Componente na direção z:

$$\frac{\partial \rho w}{\partial t}+\frac{\partial \rho u w}{\partial x}+\frac{\partial \rho v w}{\partial y}+\frac{\partial \rho w^2}{\partial z}=-\frac{\partial p}{\partial z}+\mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)+S_{Mz}$$

Em sua forma compacta, tem-se:

$$\frac{\partial\left(\rho\vec{V}\right)}{\partial t}+\nabla.\left(\rho\vec{V}\otimes\vec{V}\right)=-\nabla p+\mu\nabla^2\vec{V}+\vec{S}_M$$

Prof. Dyrney Araújo dos Santos

Professor Dyrney Araújo dos Santos
Universidade Federal de Goiás
Engenharia Química
site: www.dyrney.com

2. Equações de Transporte

2.7 Equação da Energia

A 1ª Lei da Termodinâmica afirma que:

Taxa de Variação da Energia em uma Partícula de Fluido = Taxa de Calor Adicionado à Partícula de Fluido + Taxa de Trabalho realizado sobre a Partícula de Fluido

De forma similar ao que foi feito para a taxa de variação de quantidade de movimento, aqui iremos considerar "ϕ" como sendo a energia total por unidade de massa (E). Logo, as formas conservativa e não conservativa da taxa de variação da energia total será

ϕ	Taxa de variação, por unidade de volume, para uma partícula de fluido	Taxa de variação, por unidade de volume, para um elemento de fluido
E	$\rho\frac{DE}{Dt}=\rho\left[\frac{\partial E}{\partial t}+\vec{V}.\nabla E\right]$	$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t}+\nabla.(\rho\vec{V}E)$

A) Taxa de Trabalho realizado sobre a Partícula de Fluido

A taxa de trabalho realizada sobre uma partícula de fluido pelas forças de superfície (vistas anteriormente) é igual ao produto da força pela componente da velocidade na direção da força: "Taxa de Trabalho = Força x Velocidade"

Componente na direção x (taxa líquida de trabalho por unidade de volume): $-\frac{\partial pu}{\partial x}+\frac{\partial u\tau_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial u\tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial u\tau_{zx}}{\partial z}$

Componente na direção y (taxa líquida de trabalho por unidade de volume): $-\frac{\partial pv}{\partial y}+\frac{\partial v\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial v\tau_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial v\tau_{zy}}{\partial z}$

Componente na direção z (taxa líquida de trabalho por unidade de volume): $-\frac{\partial pw}{\partial z}+\frac{\partial w\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial w\tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial w\tau_{zz}}{\partial z}$

Prof. Dyrney Araújo dos Santos

Professor Dyrney Araújo dos Santos
Universidade Federal de Goiás
Engenharia Química
site: www.dyrney.com

2. Equações de Transporte

2.7 Equação da Energia

A) Taxa de Trabalho realizado sobre a Partícula de Fluido

Somando-se as componentes, tem-se a taxa total de trabalho realizado pelas forças de superfície sobre uma partícula de fluido por unidade de volume

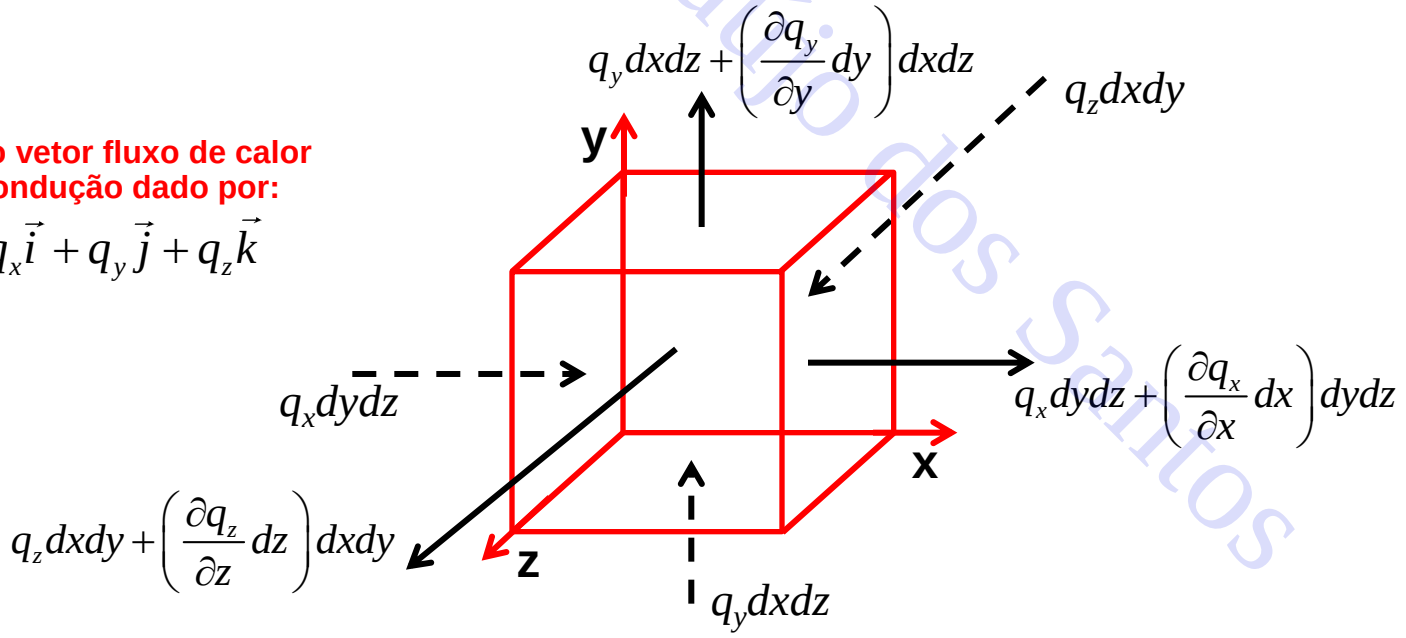
$$-\nabla.\left(P\vec{V}\right)+\left[\frac{\partial u\tau_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial u\tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial u\tau_{zx}}{\partial z}+\frac{\partial v\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial v\tau_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial v\tau_{zy}}{\partial z}+\frac{\partial w\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial w\tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial w\tau_{zz}}{\partial z}\right]$$

B) Taxa de Calor Adicionado à Partícula de Fluido

O calor adicionado à uma partícula de fluido é necessariamente por condução. O transporte advectivo de calor (por movimento de fluido) será levado em consideração no termo de "acúmulo".

Sendo o vetor fluxo de calor por condução dado por:

$$\vec{q}=q_x\vec{i}+q_y\vec{j}+q_z\vec{k}$$



Prof. Dyrney Araújo dos Santos

Professor Dyrney Araújo dos Santos
Universidade Federal de Goiás
Engenharia Química
site: www.dyrney.com

2. Equações de Transporte

2.7 Equação da Energia

B) Taxa de Calor Adicionado à Partícula de Fluido

A taxa líquida de calor adicionado à partícula de fluido é dada por:

$$q_x dydz + q_y dxdz + q_z dxdy - \left(q_x dydz + \frac{\partial q_x}{\partial x} dxdydz \right) - \left(q_y dxdz + \frac{\partial q_y}{\partial y} dydxdz \right) - \left(q_z dxdy + \frac{\partial q_z}{\partial z} dzdxdy \right)$$

Após as simplificações e dividindo pelo volume (dxdydz), tem-se:

$$-\frac{\partial q_x}{\partial x} - \frac{\partial q_y}{\partial y} - \frac{\partial q_z}{\partial z} = -\nabla . \vec{q}$$

Podemos modelar o fluxo de calor por condução utilizando a Lei de Fourier, a qual pode ser escrita para cada componente do fluxo condutivo de calor (q_x, q_y e q_z). Considerando-se o material isotrópico, as propriedades não variam com a direção, ou seja, $k_x = k_y = k_z = k$, tem-se:

$$q_x = -k\frac{\partial T}{\partial x} \qquad q_y = -k\frac{\partial T}{\partial y} \qquad q_z = -k\frac{\partial T}{\partial z}$$

Substituindo a Lei de Fourier na equação da taxa líquida de calor por condução, tem-se, finalmente:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z} \right) = \nabla . \left(k\nabla T \right)$$

Prof. Dyrney Araújo dos Santos

Professor Dyrney Araújo dos Santos
Universidade Federal de Goiás
Engenharia Química
site: www.dyrney.com

2. Equações de Transporte

2.7 Equação da Energia

A energia total por unidade de massa (E) presente na taxa de variação (ver tabela no slide 58) é definida como sendo a soma da energia interna específica (*i*), da energia cinética específica ($1/2V^2$) e da energia potencial específica (g×z, sendo z uma cota na vertical)

$$E = i + \frac{1}{2}\left(u^2 + v^2 + w^2\right) + gz$$

Substituindo a taxa líquida de calor por condução, a taxa de variação da energia total e a taxa total de trabalho realizado pelas forças de superfície, teremos a equação da energia para um elemento de fluido, conforme abaixo, sendo que o efeito da energia potencial foi incluído no termo fonte S_E. Qualquer outro termo adicional de "geração" de energia térmica pode ser adicionado ao S_E.

$$\frac{\partial\left(\rho E^*\right)}{\partial t} + \nabla.\left(\rho\vec{V}E^*\right) = -\nabla.\left(P\vec{V}\right) + \left[\begin{array}{l} \dfrac{\partial u\tau_{xx}}{\partial x} + \dfrac{\partial u\tau_{yx}}{\partial y} + \dfrac{\partial u\tau_{zx}}{\partial z} + \dfrac{\partial v\tau_{xy}}{\partial x} + \dfrac{\partial v\tau_{yy}}{\partial y} \\ + \dfrac{\partial v\tau_{zy}}{\partial z} + \dfrac{\partial w\tau_{xz}}{\partial x} + \dfrac{\partial w\tau_{yz}}{\partial y} + \dfrac{\partial w\tau_{zz}}{\partial z} \end{array}\right] + \nabla.\left(k\nabla T\right) + S_E$$

Sendo:

$$E^* = i + \frac{1}{2}\left(u^2 + v^2 + w^2\right)$$

Prof. Dyrney Araújo dos Santos

Professor Dyrney Araújo dos Santos
Universidade Federal de Goiás
Engenharia Química
site: www.dyrney.com

2. Equações de Transporte

2.8 Diferentes formas da Equação da Energia

- **Equação da energia em termos da energia interna específica (*i*)**

Observação 17: Para se obter a equação da energia apenas em termos da energia interna, é necessário subtrair da equação anterior (para E^*) a energia cinética. A parte da energia relativa apenas à energia cinética pode ser obtida multiplicando a equação do movimento na direção x por ela mesma, a equação do movimento na direção y por ela mesma, a equação do movimento na direção z por ela mesma, e depois somando os resultados e dividindo por 2.

Desta forma, a parte da energia relativa apenas à energia cinética se torna:

$$\frac{\partial\left[1/2\rho\left(u^2+v^2+w^2\right)\right]}{\partial t}+\nabla.\left(1/2\rho\left(u^2+v^2+w^2\right)\vec{V}\right)=-\vec{V}.\nabla P+\left[\begin{array}{l} u\left(\frac{\partial\tau_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}\right) \\ +v\left(\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}\right) \\ +w\left(\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zz}}{\partial z}\right) \end{array}\right]+\vec{V}.\vec{S}_M$$

Subtraindo da equação no slide anterior (para E^*) a equação acima, teremos a ***equação para a energia interna*** (*i*), sendo o novo termo fonte $S_i = S_E - V.S_M$. Podemos, também, substituir cada componente do tensor viscoso acima pelo modelo de Navier-Stokes mostrado no slide 55. Finalmente, teremos, após um rearranjo algébrico:

$$\frac{\partial\left(\rho i\right)}{\partial t}+\nabla.\left(\rho\vec{V}i\right)=-P\nabla.\vec{V}+\nabla.\left(k\nabla T\right)+\Phi+S_i$$

Sendo Φ a função de dissipação viscosa (observe que é sempre positiva), ou seja, a "geração" de energia térmica devido às taxas de deformações sofridas pelo fluido:

$$\Phi=\mu\left\{2\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right]+\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right\}+\lambda\left(\nabla.\vec{V}\right)^2$$

Prof. Dyrney Araújo dos Santos

Professor Dyrney Araújo dos Santos
Universidade Federal de Goiás
Engenharia Química
site: www.dyrney.com

2. Equações de Transporte

2.8 Diferentes formas da Equação da Energia

- **Equação da energia em termos da entalpia total específica (h_0)**

Observação 18: Para escoamentos compressíveis, a equação da energia é frequentemente representada em termos da entalpia total específica. A entalpia específica h e a entalpia total específica h_0 são definidas conforme segue:

$$h = i + \frac{P}{\rho} \quad \text{e} \quad h_0 = h + \frac{1}{2}\left(u^2 + v^2 + w^2\right) \text{ ; foi visto que: } \quad E^* = i + \frac{1}{2}\left(u^2 + v^2 + w^2\right)$$

Combinando E^*, h e h_0, teremos:

$$h_0 = i + \frac{P}{\rho} + \frac{1}{2}\left(u^2 + v^2 + w^2\right) = E^* + \frac{P}{\rho}$$

Finalmente, substituindo a relação acima na equação escrita para E^* (ver slide 61):

$$\boxed{\frac{\partial\left(\rho h_0\right)}{\partial t} + \nabla.\left(\rho \vec{V} h_0\right) = \nabla.\left(k\nabla T\right) + \frac{\partial P}{\partial t} + \nabla.\left(\vec{V}P\right) + \Phi + S_{h_0}}$$

- **Equação da energia em termos da temperatura (T)**

Observação 19: Para o caso especial de um escoamento incompressível, teremos $i = c_p T$, sendo i a energia interna específica e c_p o calor específico, e $\nabla.\vec{V} = 0$. Neste caso, poderemos modificar a equação anteriormente escrita para i (ver slide 62) e reescrevê-la em termos da temperatura T, conforme abaixo:

$$\boxed{\frac{\partial\left[\rho c_p T\right]}{\partial t} + \nabla.\left(\rho \vec{V} c_p T\right) = \nabla.\left(k\nabla T\right) + \Phi + S_i}$$

Prof. Dyrney Araújo dos Santos

Professor Dyrney Araújo dos Santos
Universidade Federal de Goiás
Engenharia Química
site: www.dyrney.com

2. Equações de Transporte

2.9 Resumo das Equações de Transporte

Até o momento vimos que as equações de transporte, na sua forma conservativa, para o escoamento de um fluido newtoniano com transferência de energia térmica são dadas por

- **Continuidade:**

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla . \left(\rho \vec{V} \right) = 0$$

- **Momento em x:**

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \nabla . \left(\rho \vec{V} u \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \nabla . \left(\mu \nabla u \right) + S_{Mx}$$

- **Momento em y:**

$$\frac{\partial \rho v}{\partial t} + \nabla . \left(\rho \vec{V} v \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \nabla . \left(\mu \nabla v \right) + S_{My}$$

- **Momento em z:**

$$\frac{\partial \rho w}{\partial t} + \nabla . \left(\rho \vec{V} w \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \nabla . \left(\mu \nabla w \right) + S_{Mz}$$

- **Energia Térmica (escrita para *i*):**

$$\frac{\partial \left(\rho i \right)}{\partial t} + \nabla . \left(\rho \vec{V} i \right) = -P \nabla . \vec{V} + \nabla . \left(k \nabla T \right) + \Phi + S_i$$

- **Equações de estado:**

$$P = P\left(\rho, T \right) \quad \text{e} \quad i = i\left(\rho, T \right)$$

Prof. Dyrney Araújo dos Santos

Professor Dyrney Araújo dos Santos
Universidade Federal de Goiás
Engenharia Química
site: www.dyrney.com

2. Equações de Transporte

2.10 Forma Geral e Forma Integral da Equação de Transporte

Observação 20: As equações de transporte mostradas anteriormente (slide 64) possuem vários termos em comum e em CFD é apropriado propor a solução de uma equação geral. Logo, tomando-se ϕ como uma variável escalar geral (ϕ igual a 1, T, i, h_0, u, v ou w), a seguinte equação de transporte geral pode ser definida, sendo Γ o coeficiente de difusão apropriado. Todos os termos que não são comuns nas equações são agrupados no termo fonte $S\phi$. Para

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t}+\nabla.\left(\rho\vec{V}\phi\right)=\nabla.\left(\Gamma\ \nabla\phi\right)+S_\phi$$

Observação 21: Como discutido no início deste curso, as EDPs serão discretizadas pelo Método dos Volumes Finitos (MVF), o qual necessita integrar a equação geral acima em todas as células computacionais (volumes de controle). Logo, é necessário se obter a forma integral da equação diferencial acima sobre o volume de controle (VC).

$$\int_{VC}\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t}d\vartheta+\int_{VC}\nabla.\left(\rho\vec{V}\phi\right)d\vartheta=\int_{VC}\nabla.\left(\Gamma\ \nabla\phi\right)d\vartheta+\int_{VC}S_\phi d\vartheta$$

A integração dos termos advectivo (segundo termo do lado esquerdo) e difusivo (primeiro termo do lado direito) são melhores representadas por uma integração sobre toda a superfície do volume de controle, visto que representam taxas líquidas para dentro do volume pelas suas faces. Logo, deve-se utilizar o **Teorema da Divergência de Gauss**, o qual transforma uma integral de volume em uma integral de superfície

Ex: seja um vetor qualquer b e n um vetor unitário perpendicular à dA e saindo da superfície do volume de controle; pelo Teorema da Divergência de Gauss, teremos

$$\int_{VC}\nabla.\left(\vec{b}\right)d\vartheta=\int_{A}\left(\vec{n}.\vec{b}\right)dA$$

Prof. Dyrney Araújo dos Santos

Professor Dyrney Araújo dos Santos
Universidade Federal de Goiás
Engenharia Química
site: www.dyrney.com

2. Equações de Transporte

2.10 Forma Geral e Forma Integral da Equação de Transporte

Logo, aplicando o Teorema da divergência de Gauss aos termos advectivo e difuso, a equação geral se torna:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_{VC}\rho\phi d\vartheta\right)+\int_{A}\vec{n}.\left(\rho\vec{V}\phi\right)dA=\int_{A}\vec{n}.\left(\Gamma\ \nabla\phi\right)dA+\int_{VC}S_{\phi}d\vartheta$$

Observação 22: **Para problemas em estado estacionário, a equação geral de transporte na sua forma integral se torna:**

$$\int_{A}\vec{n}.\left(\rho\vec{V}\phi\right)dA=\int_{A}\vec{n}.\left(\Gamma\ \nabla\phi\right)dA+\int_{VC}S_{\phi}d\vartheta$$

Observação 23: **Para problemas transientes, é necessário, também, a integração no tempo t sobre um pequeno intervalo de tempo Δt. Neste caso, a equação de transporte geral se torna:**

$$\int_{\Delta t}\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_{VC}\rho\phi d\vartheta\right)dt+\int_{\Delta t}\int_{A}\vec{n}.\left(\rho\vec{V}\phi\right)dAdt=\int_{\Delta t}\int_{A}\vec{n}.\left(\Gamma\ \nabla\phi\right)dAdt+\int_{\Delta t}\int_{VC}S_{\phi}d\vartheta dt$$

A equação de transporte geral agora está preparada para a aplicação do Método dos Volumes Finitos, detalhado nos próximos tópicos deste curso.

Prof. Dyrney Araújo dos Santos

Professor Dyrney Araújo dos Santos
Universidade Federal de Goiás
Engenharia Química
site: www.dyrney.com

Bibliografia

VERSTEEG, H.K.; MALALASEKERA, W. An Introduction to Computational Fluid Dynamics: The Finite Volume Method, 2nd ed. Pearson Education Ltd.: Harlow, UK,2007.

MALISKA, C.R. Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional, Livros Técnicos e Científicos Editora S/A, 2ª Edição Revista e Ampliada, 2004.

PATANKAR, S.V. Numerical Heat Transfer and Fluid Flow, Hemisphere Publishing Corporation, Taylor & Francis Group. New York, 1980.

Prof. Dyrney Araújo dos Santos